

教育新嘗試 Educational Innovation

數學課堂實踐新路向

鄧幹明

香港中文大學課程與教學學系

引言

教育統籌局（2003）發表的《質素保證視學2002-2003周年報告》就教學方面指出，大部分的課堂均由教師主導，教學模式以直接教授或講述為主，欠缺組織多元化活動來加強學生互動（頁14）。數學教師應如何改善上述的情況呢？本文試從一節數學課堂的教學片段中，引申出有哪些地方可以作另類選擇，以便符合香港當前課程改革的精神，冀能給予教師一點啟示。

數學課程改革

筆者認為課程改革賴以成功之處有三：首先，數學教師是否清楚了解改革之新訴求；例如在數學教學的過程中，期望教師能：(1)加強師生之間在課堂的互動，以提高學生的思維及溝通能力；及(2)使用多元化的學習活動（包括專題研習及應用資訊科技）和多元化評估（包括課堂觀察、發問、開放式問題及專題習作）以改善學與教（課程發展議會，2002，頁iv）。其次，教師是否認同這些新訴求；認同與否又將視乎教師對新課程的關注程度。根據鄧幹明、曾倫尊

(2003)的問卷調查，教師對數學新課程的關注階段¹是視乎他們的專業訓練、教學經驗、任教學校的類別和在數學科所擔當的角色而有所不同(頁218)。最後，亦是最核心的，是教師應如何改變課堂的教學模式才能符合新訴求？本文的主旨便正是嘗試回應這個核心問題，特別是學習活動的構思。

課堂上的學習活動

學習活動的設置是希望學生透過完成教師安排的活動後，從中達致學習的目標。在活動的過程中，學生將有實際操作的機會。根據教育心理學家和兒童心理學家等的研究，此等操作對於學習的發展和教育起著十分重要的作用，曹飛羽(1996)把這歸納為：(1)實際操作是兒童智力活動的源泉。只有通過親自操作，獲得直接的經驗，才便於在此基礎上進行正確的抽象和概括，形成數學的概念和法則。(2)實際操作有助於發展兒童的思維能力。在實際操作中，學生要觀察、分析、比較所操作的對象的相同點、不同點，然後進行抽象、概括。(3)實際操作可以促進學生的全面發展，包括可以培養學生動手操作的能力以及促進大腦兩半球的協調發展(頁102)。

然而，教師應根據甚麼原則去設計有效的學習活動呢？筆者認為有以下數項：

一、全面性的目標導向

數學教學上，教師的最主要任務是讓學生的數學知識有所增益，因此，教師安排的教學流程和學習活動均應有明確的學習目標，務求令到學生課後學有所成；教師只有理解了教學目標，才能夠適切地安排或設計教學工作的各個環節；學生只有理解了教學目標，才能夠集中自己的時間和精力，不斷地改進自己的學習，獲得最大可能的發展(石中英，2003，頁16)。所以，設計活動時，教師便得非常清楚活動背後所隱藏的學習目標，學生完成活動後，教師才能有所依循去審視達標的程度。筆者要強調的是，這裏所指的學習目

標並非單指知識方面，其他如學習能力，甚至態度方面也應包括在內，只有這樣，學生的學習才來得全面。

二、能夠體現數學知識的特性

數學知識具有很強的結構性，相信這是無可置疑的。數學雖然有它抽象的一面，但概念之間卻往往蘊含著具體的關連，問題是教師在教學時能否悉心安排一些活動，讓學生自行揭視當中關連的地方，讓學生經歷「從已知到未知」的學習過程。學生一旦掌握知識之間的來龍去脈，才有機會對知識作透徹的理解，亦即是Skemp (1987) 所提出的關係式理解 (relational understanding)，如是者學習才有效果和來得有意義。因為對知識有了真正的理解後，學生才可望靈活地運用知識、才可以適應新情境以及促進新知識的學習 (Hiebert et al., 1997, p. 1)。筆者要強調的是，這裏所指的知識是數學上的概念性知識 (conceptual knowledge)，而並非學習運算技能上的程序性知識 (procedural knowledge)；可惜後者往往卻是數學老師唯一重視的，以致在數學教學上產生很大的缺失。²

三、以探究為本質

活動的趣味性和難度是影響學生的參與和投入的主要因素，最終亦會影響學生的學習成果。再者，如果學習活動缺乏應有的挑戰性，那麼，我們的學生就不僅不可能在知識上得到迅速的成長，也不可能真正體會到戰勝困難取得進步的歡悅，從而也就不利於相應的「情感、態度和價值觀」的培養 (鄭毓信，2003)。因此，設計活動時，教師應根據學生的先備知識、性向和學習能力，不斷把活動的難度加深，以便提升學生的能力，擴闊學生的知識面。

當中的主要手法是，活動的要求可以從開放到封閉，意謂活動的初期盡量給予多些機會讓學生自由發揮，然後老師逐步把焦點收窄，最終引領學生自行領略活動背後的意義。又或者倒過來從封閉到開放，意謂活動的初期，學生只須按照老師的指示按步就班即可，

但隨之而來的延展部分卻是在條件鬆綁下，學生自行想辦法解決問題，從而頓悟出活動背後的深層價值。

總之，整個過程盡可能給予學生機會發表他們的見解，老師只是扮演促進者和啟發者。正如Rowan & Robles (1998)所言：做數學時，要求學生分享解難策略是一個簡單但有力的工具去培養他們的理解力和變通力 (flexibility) (p. 504)。學生獲得的不單是現成的結論或知識點，而是一種探索式和主動的認知體驗，擁有的是一種實際的運用能力 (劉開富、唐宓、劉炳龍，2003，頁30)。

課堂教學實錄

以下是一個小學五年級的數學教學實錄〔編按：實錄中大部分口語改為書面語，以便一般華人讀者閱讀〕，課題是三角形面積。筆者將以它來具體說明上述原則的要求，並作出補充建議。

師：好吧，在未開始今個課題之前，我先和你們做一個活動。稍後我會每組、每兩個人派一張平行四邊形的紙，你們要在紙上先畫一條對角線。有無同學不清楚甚麼叫對角線？

生：無。

師：好，你們先畫好條對角線，然後另一個同學就要沿著這條對角線把平行四邊形剪開，清楚嗎？

生：清楚。

師：OK，我現在就派張紙給你們吧。

.....

師：唔，應該每組同學都有一把較剪了。現在先找一位同學在平行四邊形上面畫一條對角線，然後另一位同學就沿住對角線將平行四邊形剪開。

〔學生依照老師的指示下完成，所以活動的初期是封閉性的，學生理應很容易便完成，毋須大費周章。〕

師：時間差不多了，是否每一組同學都剪完啦？好吧，我們等等這一組吧……好啦，完成了！OK，同學可否話我知，完成了之後，你個平行四邊形變成兩個甚麼形狀啊？……鍾XX。

鍾XX：三角形。

師：三角形。好，謝謝！對了，這個平行四邊形現變成兩個三角形啦。那麼這兩個三角形有甚麼特別呢？劉XX。

劉XX：兩個面積都一樣。

師：兩個面積都一樣。有無同學反對啊？

生：無。

師：無啊？好啦，盧XX，你話我知，點解你會覺得這兩個面積都一樣呢？

盧XX：因為都是由一個平行四邊形中間分割出來的。

[盧生的回應反映該生的觀察力不俗，雖然他只是以「中間分割」來形容，但可見他能看出對角線把平行四邊形平分兩份。]

師：是啊？那你怎樣可以知道這兩個面積是一樣啊？

盧XX：兩個互相疊埋一齊。

[該生進一步顯示他具備了空間想像力，因為他能指出把兩個三角形互相重疊在一起；值得注意的是疊放之前，學生是需要在腦海中把圖形作適當的轉移（transformation）才可使兩者完全重疊。]

師：你出來試一試吧。

師：做給同學看看……疊埋之後如何啊？有甚麼發現？

盧XX：一樣大。

師：一樣大是吧？謝謝你！

師：疊埋之後我們發覺一樣大，那我們就可以知道原來這兩個三角形的面積是相等了。

師：好啦！這兩個三角形的面積和之前原來的平行四邊形的面積又有甚麼關係呢？劉YY。

劉YY：這兩個三角形的面積是之前那個未剪開的平行四邊形的一半。

〔劉生的回應明顯地反映她具備邏輯推理能力，因為她從目下所得的資料合理地指出三角形面積與平行四邊形面積的關係。〕

師：對了，劉YY說這兩個三角形的面積，其中一個三角形的面積是之前那個平行四邊形的一半。那麼同學還記得平行四邊形的面積怎樣計嗎？……王XX。

王XX：底乘高。

師：底乘高。平行四邊形的面積就是底乘高，那麼現在三角形的面積呢？……剛才同學就說三角形的面積是平行四邊形面積的一半，所以我們可以得出一條甚麼樣的公式呢？許XX。

許XX：底乘高除以二。

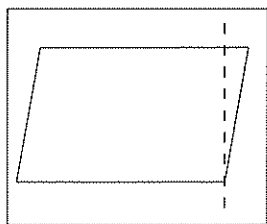
師：底乘高除以二。很好，謝謝你！那我們可以用這一個寫法了！或者我們可以再用之前學過的那個分數線的寫法。OK？於是就得出這個三角形面積的公式，原來就等於底乘高除以二啦！

從以上的師生對答中，反映老師能夠從活動的結果裏，提供機會予學生展示他們其他方面的能力。換言之，活動的設計正包含知識以外的其他目標。

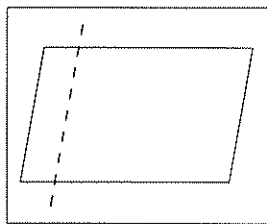
另一方面，學生學習至此，三角形面積的求法已昭然若揭，因為活動的設計是帶領學生從平行四邊形面積（已知）過渡至三角形面積的求法（未知），亦由此帶出兩者之間存在著的具體關連。³有了這個基礎，當學生學習梯形面積的時候，老師便可期望他們能把學習遷移，自行探究梯形面積的公式；更甚者，老師大可以直接展示梯形面積的公式，若學生能夠解釋公式的由來，即反映學生對於平行四邊形引申出的三角形和梯形已經達致一定的理解，亦即是掌握了三者之間的內部結構關係。

又或者當學生發現了三角形面積和平行四邊形面積的關係後，老師可以把活動的條件鬆綁，例如，著學生隨意在平行四邊形上加

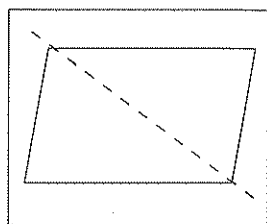
一直線，然後把圖剪開，这下子的結果就變得多樣化了。老師要跟進的是帶領學生把不同的結果作歸納，例如分成的結果大致可以歸納為三類：(1) 圖形的類型截然不同（見圖一）；(2) 圖形的類型一樣，但大小不同（見圖二）；及(3) 圖形的類型及大小均一樣（見圖三）。老師下一步才增加限制，提高難度：要得出兩個形狀大小均一樣的圖形，應怎樣加上該條直線？若全班都只是給出兩個全等的平行四邊形，老師便得進一步增加限制：得出的兩個圖形要形狀及大小一樣，但不可以是平行四邊形。這樣子逐步增加限制之下，學生便得多動腦筋才可解決問題，因為條件愈多，難度愈大，這種由開放答案，然後逐步提高要求，最後把焦點收斂於學習目標上的手法，既可培養學生的解難能力，同時亦讓學生體驗學問本身是充滿探究味道的。



圖一



圖二



圖三

接著老師與學生釐清高和底的關係之後，老師用上課堂中段大部分的時間去教授學生如何以給出的底，構作相對的高。以下是師生的對話節錄：

師：如果我給你一個三角形，把個底給你，究竟我們又應該怎樣去畫個高出來呢？假設這個是底，那麼我地就要利用到直尺了！要用直尺啦，我想找個同學幫幫手。周XX，我們畫這個三角形的高的時候，需要用把直尺擺在底那條線上，請你幫我按一下吧。擺在那個底上面，之後用另一把直尺，我們說它要同個底互相垂直嘛，那我們就將個底貼住這把間尺的這個位置，貼住這個底，然後慢慢的這樣推過去，直至去到這個底線相對的對角這個位，停下來。那麼就會發覺這兩把間尺現在就是互

相垂直啦！即是說我沿住這個對角，這個底的對角，畫一條直線下來的話，那這條線就是這個三角形相對於這條底的高啦！清楚了嗎？

生：清楚了。

〔老師在黑板上示範如何運用兩把直尺構作給出的底之下相對的高。片段中老師的講述其實已很清楚，黑板上所畫的三角形也足夠大，所以學生應該可以掌握構作方法。〕

師：好吧，如果有這樣一個三角形，我告訴你這個是底，那我們有沒有辦法在它的對角，即是這一隻角，在三角形裏面畫一條垂直線落到個底那裏呢？〔見右圖〕

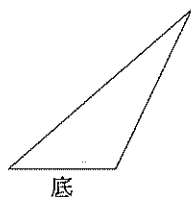
生：有……。

師：畫到嗎？

生：畫到畫到。

師：要在三角形裏面呀！

生：啊……唔。



師：畫到了嗎？是畫不到的！那麼，我們就要利用一樣叫延伸線的方法啦！同樣地，我先找一位同學出來幫一幫我。黎XX。一樣啦，當我們要畫個高的時候，就要找一把間尺，放在它的底上面，然後因為我要在這個底的對角畫一條垂直線下來嘛，所以我就要向這個底的這邊，畫一條延伸線出來，我們要利用虛線畫一條延伸線，然後用另一把間尺，貼住這個底線一直向這邊移，移到去它的對角這個位置，然後垂直這樣，畫一條直線下來。謝謝你！畫一條直線下來，令到這個底同對角這個位延伸的線條成九十度，成一個直角。那麼，我們就會說，這個就是這三角形的高啦，相對於這個底邊來說。清楚嗎？

生：清楚。

師：那麼同學現在懂得怎樣憑著一個三角形的一條底邊，再去找出個高了吧！

〔老師呈現另一種特殊情況，提出能否於三角形內畫出相對的高，

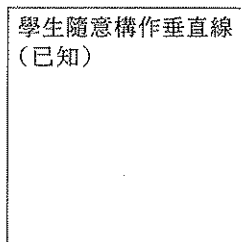
學生初時可能未經思考便匆匆答「畫到」。其實，當學生有此回應時，老師大可以邀請該生出來構作，讓學生自我否定；這點非常重要，因為學生在建構三角形的底、高及兩者關係時，其觀念或會與老師的有所出入，老師應有耐性去給學生發表，老師從中表達自己的看法如何與其不同。對於特殊情況的處理，老師的示範同樣相當清楚。]

在學習如何在三角形內構作高和底的問題上，學生又可以透過甚麼探究的活動，自行發現構作的方法呢？基本原則與上述所提及的均相同：即從已知到未知；領悟未知後，學生反過來加深對已知的認識，達致鞏固先備知識或技能的效果。

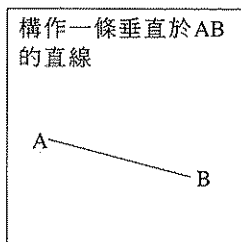
從開放到封閉

首先，在三角形內構作高和底之前，學生應有的先備知識是高和底是互相垂直的；因此，學生的先備技能是懂得構作垂直線。在此基礎上，教師便可以讓學生自行構作一對垂直線開始（已知）。然後，教師把條件收窄：要求學生在指定的直線上構作它的垂直線。值得注意的是構作的結果並非唯一的！所以教師應與學生探討這方面的結果，以便引導學生當條件進一步收窄時該如何處理，例如在原有的直線上，外加一點，然後要求學生在指定直線上構作它的垂直線，但同時需要經過指定的點（見圖四至圖六）。若學生能夠順利完成上述的工作，當教師返回教學焦點：於三角形內構作高和底時，教師只需呈現問題（見圖七），讓學生把上述操作時所表現的技能加以轉移，亦即是技能的應用，便可以符合筆者所提的基本原則：從已知到未知。

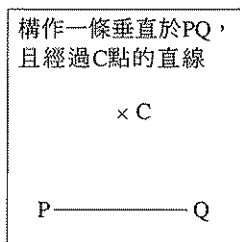
當學生已熟習構作三角形內出現的高後，教師便需要安排一些出現於三角形外的高的情況（如圖八所示）。這個時候，學生便會遇著認知上的衝突，因為之前的技能未能發揮作用；於此，教師無須急於把作法直接講授，以免失去探究的味道；相反，教師應給予學生一些時間自行解決問題，期間教師或須給予適當的指引，例如介紹延長線等。



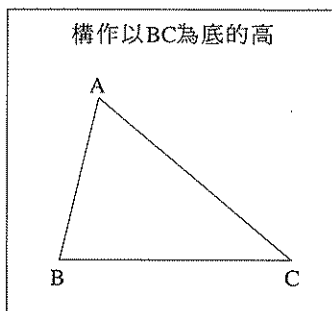
圖四



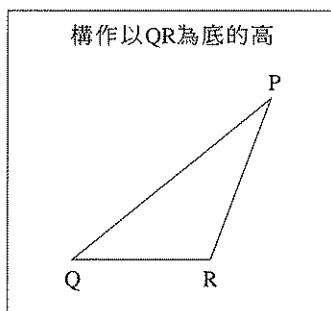
圖五



圖六



圖七 技能的應用



圖八 技能的延展

學習至此，學生對於任意三角形內構作對應的底和高便大功告成。筆者要重申的是以上的教學流程，其背後的設計理念是以探究為本質，從開放問題到收窄焦點，逐步引領學生從已知到未知，最終由學生自行悟出學習內容，並自行聯繫知識之間或技能之間相連的地方。此外，在整個教學期間，學生需要按照教師呈現的問題不斷地去思考，這樣子的學習不但符合以探究為本質之原則，同時亦可以滿足全面性的目標導向。

結語

上述的討論只是透過剖析一個真實的教學錄像，簡潔地帶出現今數學課程改革的新路向，短短的十分鐘片段中，雖然未能把所有新路向一一呈現，但對於面對如何改變課堂教學模式才能符合課程改革精神的教師而言，深信這個討論已包括理論與實踐均備之參

考價值。餘下的亦是最重要的，是教師是否願意踏出嘗試的第一步，然後不斷作教學的反思，反思時不僅要檢查自己的行為和效果，還要考慮學生學的行為和效果（姚靜，2003，頁35）。特別是後者，因為教育的對象正是我們的學生，任何改革均應以學生的利益為依歸，學習對於學生而言便是他們最首要的任務，影響學生學習的因素固然不少，但無可否認，教師的教學必然起著關鍵性的作用。因此，若教師能夠不斷自我完善，不斷尋求新的突破而不只囿於學生的學業成就，如是者則必能令學生得到更全面的教育，從而令到他們更能適應及參與當代世紀的社會變革。

註釋

1. 五個關注階段指的是：低度關注、資訊及個人、管理、後果及合作、改良。
2. 詳見鄧幹明(2002)。*〈探討數學教育上的另類思維〉*。《數學教育》，第14期，頁28-34。
3. 另一種看法是以兩個全等三角形併合出一個平行四邊形，去演示三角形面積的公式之由來。筆者當然認同這種做法均能達致相同的學習效果；不過，筆者認為上述的手法有兩個問題需要考慮：首先，從學習順序和探究思維上，學生是先掌握矩形面積、平行四邊形面積，再去探究三角形面積的求法，換言之，學生的邏輯思維可以合理地從平行四邊形出發（或甚至從矩形出發）去自行發現三角形面積的公式，亦即是本文內的手法。若以前述的手法引入，對於普通的學習者來說，他們的疑惑是：為何會想出把欲求面積的三角形複製另一個，然後把兩者合併出一個平行四邊形來？要知道在數學學習上，培養學生從先備知識探求出新知識的思維是非常重要的。另一個需要考慮的問題是：兩個全等三角形能併出一個平行四邊形當然是一個事實，但若以數學的嚴謹性來說，我們是需要加以論證的，這樣做法卻又超出小學生的學習能力和學習範圍。因此，筆者認為若以合併手法引入，當中有些地方是沒有向學生交代清楚的。

參考文獻

- 石中英(2003)。〈教學：一種理性的探險〉。《教育科學研究》，第5期，頁16-19。
- 姚靜(2003)。〈數學任務框架：一種教學反思的理論〉。《貴州師範大學學報（自然科學版）》，第3期，頁31-35。
- 教育統籌局(2003)。《質素保證視學2002-2003周年報告》。香港：政府印務局。
- 曹飛羽(1996)。《小學數學教育改革文集》。北京：人民教育出版社。
- 鄧幹明、曾倫尊(2003)。〈數學老師對課程的關注調查〉。載鄧幹明、曾倫尊主編，《學會學習：數學課程改革評析》(頁212-220)。香港：香港數學教育學會。
- 課程發展議會(2002)。《數學教育：學習領域課程指引(小一至中三)》。香港：政府印務局。
- 劉開富、唐宓、劉炳龍(2003)。〈試論教師課堂教學設計的基本形式和原則〉。《雲南電大學報》，第5卷第3期，頁29-32。
- 鄧毓信(2003)。〈課堂教學與數學課程改革〉。《教學月刊·小學版》，第4期，頁31-36。
- Hiebert, J., Carpenter, T. P., Fennema, E., Fuson, K. C., Wearne, D., Murray, H., Olivier, A., & Human, P. (1997). *Making sense: Teaching and learning mathematics with understanding*. Portsmouth, NH: Heinemann.
- Rowan, T. E., & Robles, J. (1998). Using questions to help children build mathematical power. *Teaching Children Mathematics*, 4(9), 504-509.
- Skemp, R. R. (1987). *The psychology of learning mathematics*. Hillsdale, NJ: L. Erlbaum Associates.

鄧幹明，香港中文大學課程與教學學系導師。

聯絡電郵：kmtang@cuhk.edu.hk