前沿的结果

杜晓明
华南理工大学数学学院

scxmdu@scut.edu.cn

2021-1-8

双曲曲面上测地线的计数

设 S_g 是亏格 g 的定向闭曲面，Mod_g 为 S_g 的映射类群，$\mathcal{M}_g$ 是 S_g 的模空间，$X \in \mathcal{M}_g$，对 S_g 上的拓扑闭曲线 γ，可定义长度函数 $l_\gamma(X)$ 为同伦于 γ 的唯一闭测地线长度。

定理（Margulis,Selberg,etc)

当 $L \to \infty$ 时，X 上长度不超过 L 的闭测地线数目 $\sim e^L/L$，即 $\sharp\{\gamma : l_\gamma(X) \leq L\} \sim e^L/L$.

注：该结论也称为“双曲曲面版本的素数定理”。

定理（Mirzakhani,2008)

存在定义在模空间上的函数 B，使得对任意 $X \in \mathcal{M}_g$，当 $L \to \infty$ 时，X 上长度不超过 L 的简单闭测地线数目 $\sim L^{6g-6} \cdot B(X)$!

Mirzakhani 的想法

拓扑曲面 S_g 上的简单闭曲线在 Mod_g 的作用下只有有限个轨道。只要对每个轨道都证明满足上述增长。Mirzakhani 实际证明的结论是：

定理（Mirzakhani,2008)

对 S_g 上的简单闭曲线 γ，存在 $\mathcal{M}_g$ 上的函数 B，存在依赖于 γ 拓扑类型的常数 C_γ，使得对任意 $X \in \mathcal{M}_g$，当 $L \to \infty$ 时，有

$$\sharp\{\alpha \in Mod_g \cdot \gamma : l_\alpha(X) \leq L\} \sim L^{6g-6} \cdot C_\gamma \cdot B(X)$$

注：该想法把原来的问题转化成了群作用轨道中的点的计算。正是这一步群作用轨道的限制，使得曲线数目的增长方式从指数增长降低到多项式增长。

简单闭曲线轨道 v.s. 双曲结构轨道

对 $\{\alpha \in \mathrm{Mod}_g \cdot \gamma : l_\alpha(X) \leq L\}$ 进行计数时，是固定住双曲结构，让简单闭曲线在 Mod_g 的轨道中变化。但是也可以反过来，固定住简单闭曲线，让双曲结构在 Mod_g 的轨道中变化。设 $\mathscr{X}$ 是 X 在 $\mathrm{Teich}(S_g)$ 中的一个原像，则有以下两个集合之间的对应：

$$\left\{ \begin{array}{c} \alpha \in \mathrm{Mod}_g \cdot \gamma \\ \alpha \text{ 为简单闭曲线} \end{array} \middle| \, l_\alpha(X) \leq L \right\} \leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} \mathscr{Y} \in \mathrm{Mod}_g \cdot \mathscr{X} \\ \mathscr{Y} \in \mathrm{Teich}(S_g) \end{array} \middle| \, l_\gamma(Y) \leq L \right\}$$

于是问题又转化成在 $\mathrm{Teich}(S_g)$ 中对 Mod_g 的群作用轨道的计数，可以利用 $\mathrm{Teich}(S_g)$ 上的几何结构帮助计算。

Teich(S_g) 是否双曲的？

尽管 Teich(S_g) 在 Teichmüller 度量下表现出许多与双曲空间类似的性质，然而，

定理（Masur,1975)

在 Teich(S_g) 中存在两条测地线，它们相互落在对方的有界邻域之中，因此无法赋予双曲度量。

证明思路：取两个“L”型平坦曲面，上下两个圆柱面的模不一样，沿水平方向拉伸、竖直方向压缩构造 Teichmüller 测地线。沿两条测地线走很远之后，上面的点对应的复结构之间，仍然存在有界的伸缩商。

定理（Masur-Wolf,1995)

Teich(S_g) 不是 Gromov 意义下 δ-双曲的，甚至不是 $CAT(0)$ 的。有些地方以正曲率弯曲，有些地方以负曲率弯曲。

Teich(S_g) 的大范围几何

度量空间之间单射 $f:(X,d_X)\to(Y,d_Y)$ 称为**拟等距嵌入**，若存在 $L>0$，对任意 $x_1,x_2\in X$，都有

$$\frac{|x_1-x_2|}{L}-L\le|f(x_1)-f(x_2)|\le L|x_1-x_2|+L.$$

若存在双射使得两个方向都是拟等距嵌入，则称这两个度量空间**拟等距**。与树（tree）拟等距的度量空间称为**拟树**（**quasi-tree**）。

定理（Bestvina-Bromberg-Fujiwara,2018）

对每个 g 都存在充分大的整数 n，使得 Mod_g 保持乘积分解地作用在拟树的乘积 $T=T_1\times T_2\times\cdots\times T_n$ 上，使得

1. *对任意 $t\in T$，群作用的轨道 $Mod_g\cdot t$ 到 T 是拟等距嵌入；*
2. *Mod_g 中任意无限阶元素在 T 上的作用是双曲型等距。*

当 $g \geq 2$ 时，Teich(S_g) $\cong \mathbb{R}^{6g-6}$ 中的开球。Thurston 定义了 $\mathcal{PMF}$ 作为 Teich(S_g) 的边界使得 Teich(S_g)$\bigcup \mathcal{PMF} \cong \mathbb{R}^{6g-6}$ 中的闭球。

$\mathcal{PMF}$（projective measured foliation 的缩写）的定义如下：设 $\mathcal{F}$ 是 S_g 上带奇点叶状结构（简称叶状结构），μ 是 $\mathcal{F}$ 上的横截测度。对 S_g 上的曲线 α，α 在 $(\mathcal{F}, \mu)$ 下的测度记为 $i(\alpha, (\mathcal{F}, \mu))$。两个带测度叶状结构在 $\mathcal{PMF}$ 中认为是相同的，若它们上面的横截测度只差一个常数比例。$\mathcal{PMF}$ 中的每一点都记作 $[(\mathcal{F}, \mu)]$，外面的方框代表射影等价类。Teich(S_g) 中点列 $\mathscr{X}_n$ 收敛于 $[(\mathcal{F}, \mu)]$，若对任意简单闭曲线 α, β，有

$$\lim_{n\to\infty} \frac{l_\alpha(\mathscr{X})}{l_\beta(\mathscr{X})} = \frac{i(\alpha, (\mathcal{F}, \mu))}{i(\beta, (\mathcal{F}, \mu))}.$$

Teich(S_g) 中测地线趋近紧化边界时的行为

对于 Gromov 视觉边界而言，对任意测地线 $\{\mathscr{X}_t\}$，当 $t \to \infty$ 时，$\mathscr{X}_t$ 必然收敛于边界处的一点。

然而取 Teich(S_g) 的 Thurston 边界，在 Teichmüller 度量下，以上现象只有在边界点 $[(\mathcal{F}, \mu)]$ 中的叶状结构唯一遍历时才有以上现象（Masur，1980s）。存在一条测地线 $\{\mathscr{X}_t\}$，当 $t \to \infty$ 时会呈现出像 $x \to 0+$ 时 $\sin \frac{1}{x}$ 的发散行为。

定理（Lenzhen-Modami-Rafi,2018)

对任意的自然数 d，都在 Teich(S_{d+1}) 中存在一条 Teichmüller 度量下的测地线 $\{\mathscr{X}_t\}$，使得当 $t \to \infty$ 时，该测地线在 $\mathcal{PMF}$ 中的极限集是 d 维的单形。

$\mathrm{Teich}(S_g)$ 与双曲三维流形

$\mathrm{Teich}(S_g)$ 中的点是离散单同态 $\rho : \pi_1(S_g) \to \mathrm{Isom}^+(\mathbb{H}^2) \subset \mathrm{Isom}^+(\mathbb{H}^3)$ 的共轭类，它不仅能给出 S_g 上的双曲结构，而且能给出 $S_g \times \mathbb{R}$ 上的双曲结构。该三维双曲结构在两个无穷远端分别是 $\partial_\infty \mathbb{H}^3 \cong S^2$ 中的上下半球面在 $\rho(\pi_1(S_g))$ 作用下的商空间，有对称的自然复结构。

$\rho : \pi_1(S_g) \to \mathrm{Isom}^+(\mathbb{H}^2)$ 经过 S^2 上的拟共形同胚共轭之后，仍然是到 $\mathrm{Isom}^+(\mathbb{H}^3)$ 的离散单同态。同样能给出 $S_g \times \mathbb{R}$ 上无限体积的双曲结构。该双曲结构在两个无穷远端仍然有复结构，但不再对称，于是得到 $\mathrm{Teich}(S_g) \times \mathrm{Teich}(S_g)$ 中的一个点。反过来，有

定理（Bers 同时单值化定理）

对任意 $(\mathscr{X}, \mathscr{Y}) \in Teich(S_g) \times Teich(S_g)$，都存在 $S_g \times \mathbb{R}$ 上的双曲结构，使得两个无穷远端复结构分别为 $\mathscr{X}, \mathscr{Y}$。

定理（Thurston)

对于曲面 S_g 上的 *pseudo-Anosov* 同胚 φ，构造圆周上的曲面丛 $M = S_g \times [0,1]/\sim$，其中 $(x,0) \sim (\varphi(x),1)$，则 M 上有双曲结构。

证明思路：取 $\mathscr{X} \in \mathrm{Teich}(S_g)$，对任意整数 n，$\varphi^n\mathscr{X}$ 也是 $\mathrm{Teich}(S_g)$ 中的点。由 Bers 同时单值化定理，$(\varphi^{-n}\mathscr{X}, \varphi^n\mathscr{X})$ 能给出 $S_g \times \mathbb{R}$ 上的双曲结构，也即给出群表示 $\rho_n : \pi_1(S_g) \to \mathrm{Isom}^+(\mathbb{H}^3) \cong \mathrm{PSL}(2,\mathbb{C})$。令 $n \to \infty$，证明 $\{\rho_n\}$ 这一系列群表示收敛于某个群表示 ρ^*。此时 $\widetilde{M} = \mathbb{H}^3/\rho^*(\pi_1(S_g))$ 上带双曲结构，仍然拓扑同胚于 $S_g \times \mathbb{R}$，并且存在双曲等距作用 $f_\varphi : \widetilde{M} \to \widetilde{M}$，使得 $\widetilde{M}/f_\varphi \cong M$。