# 曲面映射类群在 Teichmüller 空间上的作用


杜晓明

华南理工大学数学学院

scxmdu@scut.edu.cn


2021-1-6

# Teichmüller 空间与模空间

**定义（曲面 $S_g$ 的 Teichmüller 空间）**

$Teich(S_g) = \{\rho : \pi_1(S_g) \to Isom^+(\mathbb{H}^2) \mid \rho$ 离散、单$\}/\sim$，$\rho_1 \sim \rho_2$ 当且仅当存在 $A \in Isom(\mathbb{H}^2)$ 使得 $\rho_1$ 通过 $A$ 与 $\rho_2$ 共轭。

**定义（曲面 $S_g$ 的模空间）**

$\mathcal{M}(S_g) = \{\rho : \pi_1(S_g) \to Isom^+(\mathbb{H}^2) \mid \rho$ 离散、单$\}/\sim$，$\rho_1 \sim \rho_2$ 当且仅当存在 $\varphi \in Out^+(\pi_1(S_g))$、$A \in Isom(\mathbb{H}^2)$ 使 $\rho_1 \circ \varphi$ 通过 $A$ 与 $\rho_2$ 共轭。

注：Teich$(S_g)$ 与 $\mathcal{M}(S_g)$ 的差别在于：定义等价关系时是否要预复合 $\mathrm{Out}^+(\pi_1(S_g))$ 的元素。这些外自同构相当于打乱了基本群上的标记。不管怎么样预复合外自同构，$\rho \circ f(\pi_1(S_g))$ 在 $\mathrm{Isom}^+(\mathbb{H}^2)$ 中作为集合的分布形状都不变。因此模空间上的点相当于曲面 $S_g$ 上的双曲结构，而 Teichmüller 空间上的点相当于曲面 $S_g$ 上的被基本群记录的双曲结构。

# 曲面映射类群

| | |
|---|---|
| $S_g$: | 亏格为 $g$ 的定向闭曲面 |
| $\mathrm{Homeo}^+(S_g)$: | $S_g$ 的保定向自同胚群 |
| $\mathrm{Homeo}^\pm(S_g)$: | $S_g$ 的自同胚群（包括保定向与反定向） |
| $\mathrm{Homeo}_0(S_g)$: | $\mathrm{Homeo}^+(S_g)$ 中恒同映射所在的连通分支 |
| $\mathrm{Mod}(S_g)$: | 曲面映射类群 $\mathrm{Homeo}^+(S_g)/\mathrm{Homeo}_0(S_g)$<br>有时也记成 $\mathrm{MCG}(S_g)$、$\mathrm{Mod}_g$ |
| $\mathrm{Mod}^\pm(S_g)$: | 扩充映射类群 $\mathrm{Homeo}^\pm(S_g)/\mathrm{Homeo}_0(S_g)$ |

曲面映射类群 $\mathrm{Mod}(S_g)$ 中的元素是曲面保定向自同胚的同伦类。

**定理（Dehn-Nielsen）**

$Mod(S_g) \approx Out^+(\pi_1(S_g))$，$Mod^\pm(S_g) \approx Out(\pi_1(S_g))$

**定义 (Mod($S_g$) 在 Teich($S_g$) 上的作用)**

- $Mod(S_g)$ 同构于 $Out^+(\pi_1(S_g))$（Dehn-Nielsen 定理）;
- $f \in Out^+(\pi_1(S_g))$ 在 $Teich(S_g)$ 上的作用形如：
  $f : [\,\rho : \pi_1(S_g) \to Isom^+(\mathbb{H}^2)\,] \mapsto [\,\rho \circ f^{-1} : \pi_1(S_g) \to Isom^+(\mathbb{H}^2)\,]$

注 1：由以上的定义，立刻有 $\mathcal{M}(S_g) = \text{Teich}(S_g)/\text{Mod}(S_g)$。Teich($S_g$) 同胚于 $\mathbb{R}^{6g-6}$，单连通，从而曲面映射类群是模空间的基本群。

注 2：此处用到的模空间虽然只对应于曲面上双曲结构或复结构的形变，但是可以证明它还恰好对应于曲面上代数曲线结构的形变，因此在代数几何里面同样重要。

# 回顾：Teichmüller 空间中的距离

设 $\rho_i : \pi_1(S_g) \to \mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$、$\mathscr{X}_i = \mathbb{H}^2/\rho_i(\pi_1(S_g))$ $(i=1,2)$ 是两个被基本群元素记录的双曲度量结构，$K(h)$ 是映射 $h$ 的最大伸缩商，则

$$\mathrm{d}_T(\mathscr{X}_1,\mathscr{X}_2) = \frac{1}{2}\inf\left\{\log K(h) \,\middle|\, h \text{ 在基本群上诱导恒同}\right\}$$

换成群表示的语言，

$$d_T([\rho_1],[\rho_2]) = \frac{1}{2}\inf\left\{\log K(\widetilde{h}) \,\middle|\, \begin{array}{c} \widetilde{h}:\mathbb{H}^2\to\mathbb{H}^2, \\ \text{对任意的 } a\in\pi_1(S_g), \\ \widetilde{h}\circ\rho_1(a) = \rho_2(a)\circ\widetilde{h} \end{array}\right\}$$

# $\mathrm{Mod}(S_g)$ 在 $\mathrm{Teich}(S_g)$ 上的作用是等距

对 $f \in \mathrm{Mod}(S_g) \cong \mathrm{Out}^+(\pi_1(S_g))$，注意 $f[\rho] = [\rho \circ f^{-1}]$。

在计算 $d_T(f[\rho_1], f[\rho_2])$ 时，取拉伸比下确界的那些 $\widetilde{h} : \mathbb{H}^2 \to \mathbb{H}^2$ 满足：对任意的 $a \in \pi_1(S_g)$ 有 $\widetilde{h} \circ (\rho_1 \circ f^{-1})(a) = (\rho_2 \circ f^{-1})(a) \circ \widetilde{h}$。

当 $a$ 取遍 $\pi_1(S_g)$ 中的元素时，$f^{-1}(a)$ 也取遍了 $\pi_1(S_g)$ 中的元素。故这些 $\widetilde{h}$ 也正好满足：对任意的 $b \in \pi_1(S_g)$ 有 $\widetilde{h} \circ \rho_1(b) = \rho_2(b) \circ \widetilde{h}$。

由此得到：计算 $d_T(f[\rho_1], f[\rho_2])$ 时需要取拉伸比下确界的那些 $\widetilde{h}$ 所组成的集合，与计算 $d_T([\rho_1], [\rho_2])$ 时需要取拉伸比下确界的那些 $\widetilde{h}$ 所组成的集合，正好是同一个集合。因此下确界相同。

# $\mathrm{Mod}(S_g)$ 在 $\mathrm{Teich}(S_g)$ 上的作用是 properly 不连续的

**定义**

群 $G$ 在空间 $X$ 上的作用称为 **properly 不连续**，若对 $X$ 中的任意紧集 $B$，$\{g \in G : g(B) \cap B \neq \emptyset\}$ 有限。

**定理（Fricke)**

*$Mod(S_g)$ 在 $Teich(S_g)$ 上的作用是 properly 不连续的*

- $\{g \in G : g(B) \cap B \neq \emptyset\}$ 意味着 $[\rho] \in B$ 与 $g[\rho]$ 相距不远；
- $[\rho] \in \mathrm{Teich}(S_g)$ 被 $\mathbb{H}^2/\rho(\pi_1(S_g))$ 上有限条测地线的长度决定；
- $[\rho] \in B$ 与 $g[\rho]$ 相距不远意味着上述有限条测地线长度变化不大；
- 给定双曲曲面 $\mathbb{H}^2/\rho(\pi_1(S_g))$，且给定上面任意一条测地线 $c$，该双曲曲面上长度与 $c$ 的长度相比变化不大的闭测地线只有有限条。

# 群在空间上作用的性质

设 $f$ 是度量空间 $(X, d)$ 上的等距变换，记

$$\tau(f) = \inf_{x \in X}\{d(x, f(x))\}$$

$\tau(f)$ 称为 $f$ 的**平移长度（translation length）**。

设群 $G$ 等距、properly 不连续地作用在度量空间 $(X, d)$ 上，则群 $G$ 的元素 $f$ 可利用平移长度分成三类：

(1) $\tau(f)$ 不能被 $X$ 上任意点取到；

(2) $\tau(f)$ 能被 $X$ 上某一点取到并且 $\tau(f) = 0$；

(3) $\tau(f)$ 能被 $X$ 上某一点取到并且 $\tau(f) > 0$。

# 映射类群元素的 Nielsen-Thurston 分类

Nielsen-Thurston 定理的 Bers 证明，其实就是让以上的 $G$ 和 $X$ 分别取成 $\mathrm{Mod}(S_g)$ 和 $\mathrm{Teich}(S_g)$，验证三类群元素的几何性质分别符合可约、有限阶、pseudo-Anosov。

设 $f$ 属于 $\mathrm{Mod}(S_g)$，则 $f$ 可以分成三类：

(1) 存在曲面上一个由有限条彼此不相交的简单闭曲线同痕类组成的集合 $C$，$f$ 固定住 $C$（集合意义下的固定，允许置换 $C$ 中的元素），并且 $f$ 的阶数无限；

(2) $f$ 是 $\mathrm{Mod}(S_g)$ 中的有限阶元素；

(3) $f$ 会固定住 $\mathrm{Teich}(S_g)$ 中的一条测地线（集合意义下的固定），$f$ 限制在这条测地线上的作用是每个点都平移了 $\tau(f)$。

# 第一类的几何性质

若 $\tau(f)$ 不能被任何一点 $[\rho] \in \mathrm{Teich}(S_g)$ 达到，证明 $f$ 会固定住有限条简单闭曲线的同痕类组成的集合的步骤：

1. 存在一系列 $\{[\rho_n]\}$，使得 $d_T([\rho_n], f[\rho_n]) \to \tau(f)$
2. 随着 $n$ 增大，在 $[\rho_n]$ 给出的双曲曲面 $\mathbb{H}^2/\rho_n(\pi_1(S_g))$ 上会存在越来越短的闭测地线
3. $\mathbb{H}^2/\rho_n(\pi_1(S_g))$ 上很短的闭测地线在 $f$ 作用下的像也会很短
4. 在固定双曲结构的曲面上，长度很短的闭测地线不能有太多（Margulis 引理），从而长度足够短的闭测地线被 $f$ 作用有限次后必然回到自身

# 第一类几何性质的证明：模空间的 thick part

设 $\mathcal{M}(S_g)$ 是亏格 $g$ 曲面的模空间，$[\rho]$ 是其中一点，$\mathbb{H}^2/\rho(\pi_1(S_g))$ 是 $[\rho]$ 对应的双曲曲面，$\varepsilon > 0$ 是很小的正数。

定义模空间上的最小长度函数以及 $\varepsilon$-thick 部分如下：

$$
\begin{aligned}
L([\rho]) \quad &: \quad \mathbb{H}^2/\rho(\pi_1(S_g)) \text{ 上最短闭测地线的长度。} \\
\mathcal{M}_{\geq\varepsilon}(S_g) \quad &: \quad \{[\rho] \in \mathcal{M}(S_g) \mid L([\rho]) \geq \varepsilon\}
\end{aligned}
$$

**定理（Mumford）**

$g \geq 1$ 时 $\mathcal{M}_{\geq\varepsilon}(S_g)$ 是紧集。

# 第一类几何性质的证明：出现很短的闭测地线

证明 $\mathbb{H}^2/\rho_n(\pi_1(S_g))$ 上会出现长度充分小的闭测地线，即对任意的 $\varepsilon$，都存在 $N$，使得 $n>N$ 时 $\mathbb{H}^2/\rho_n(\pi_1(S_g))$ 会落到 $\mathcal{M}_{\geq\varepsilon}(S_g)$ 之外。

证明如下：若存在固定的 $\varepsilon$，对任意 $N$，都存在 $n>N$ 使得 $\mathbb{H}^2/\rho_n(\pi_1(S_g))$ 会落到 $\mathcal{M}_{\geq\varepsilon}(S_g)$ 之中。由于 $\mathcal{M}_{\geq\varepsilon}(S_g)$ 是紧集，存在子序列 $\rho_{n_k}$ 使得 $\mathbb{H}^2/\rho_{n_k}(\pi_1(S_g))$ 在模空间中收敛。拉回到 $\mathrm{Teich}(S_g)$ 中看，即存在一系列的 $g_k\in\mathrm{Mod}(S_g)$，使得 $g_k[\rho_{n_k}]$ 收敛于 $\mathrm{Teich}(S_g)$ 中的某点 $[\eta]$。此时存在 $\mathrm{Mod}(S_g)$ 中无限个元素 $g_k\circ f\circ g_k^{-1}$，作用在 $[\eta]$ 上得到的结果与 $[\eta]$ 的距离小于固定常数，这导致 $\mathrm{Mod}(S_g)$ 在 $\mathrm{Teich}(S_g)$ 上的作用不是 properly 不连续的，矛盾。

# 第二类的几何性质

对 $f \in \mathrm{Mod}(S_g)$，若 $\tau(f) = 0$ 且能被达到，证明 $f$ 有限阶：

- 存在 $[\rho] \in \mathrm{Teich}(S_g)$，满足 $f[\rho] = [\rho]$。
- 存在 $A \in \mathrm{Isom}(\mathbb{H}^2)$，$\rho \circ f^{-1} : \pi_1(S_g) \to \mathrm{Isom}^+(\mathbb{H}^2)$ 与 $\rho : \pi_1(S_g) \to \mathrm{Isom}^+(\mathbb{H}^2)$ 通过 $A$ 共轭。
- 对任意的 $x \in \mathbb{H}^2, a \in \pi_1(S_g)$，有 $d_{\mathbb{H}^2}(\rho(e) \cdot x, \rho(a) \cdot x) = d_{\mathbb{H}^2}(\rho \circ f^{-1}(e) \cdot x, \rho \circ f^{-1}(a) \cdot x)$，因此在共轭的意义下 $\rho$ 与 $\rho \circ f^{-1}$ 只差一个等距的旋转。
- 旋转的角度必须是 $\pi$ 的有理数倍，否则 $\rho$ 不离散。

# 第三类的几何性质

若存在 $[\rho] \in \mathrm{Teich}(S_g)$ 使得 $d([\rho], f[\rho]) = \tau(f)$，证明存在两族相互横截的带奇点带测度叶状结构 $(\mathcal{F}^u, \mu_u)$、$(\mathcal{F}^s, \mu_s)$：

1. $f$ 会固定住 $\mathrm{Teich}(S_g)$ 中经过 $[\rho]$ 与 $f[\rho]$ 的测地线；
2. $\mathrm{Teich}(S_g)$ 中落在以上测地线上每一个点在 $f$ 下的作用正是沿着该测地线被推了距离 $\tau(f)$；
3. 给出两组相互横截的带奇点带测度叶状结构。

对最后一步，Bers 的证明路线：

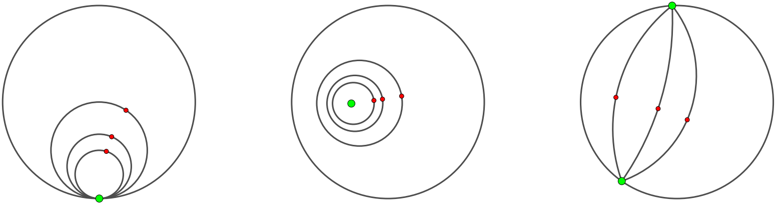
- 从 $[\rho]$ 到 $f[\rho]$ 存在 Teichmüller 映射（Teichmüller 基本定理）
- 沿着 Teich$(S_g)$ 中固定的测地线推一个固定的距离 $\Longleftrightarrow$ 存在一个全纯二次微分在以上 Teichmüller 映射作用下不变
- 带复结构曲面上的全纯二次微分确定了拓扑曲面上两组相互横截的奇异叶状结构

（以上用到复结构、Teichmüller 基本定理、全纯二次微分的部分是整个定理中证明的难点，也是用到分析工具最多的部分）。

# 第三类的几何性质：Thurston 的证明

对最后一步，Thurston 的证明路线：

- Teich($S_g$) 中的点相当于一个测度，用于衡量拓扑曲面上闭曲线同痕类的长度
- Teich($S_g$) 中被 $f$ 固定的测地线两端的相当于两个“极限测度”（即作紧化之后的点）
- 用带横截测度的叶状结构来描述这些“极限测度”，这些叶状结构作为曲面上的拓扑对象，也在 $f$ 的作用下不变
- “极限测度”在支集上的取值，在 $f$ 作用下只变化一个比例，因此若想把这些“极限测度”作为紧化后的不动点，需要取射影等价类。



让 Mod($S_g$) 中元素等距地作用在 Teich($S_g$) 的 Thurston 紧化上，根据该作用的不动点集类型来对 Mod($S_g$) 中元素进行分类。

| 元素类型 | 不动点的几何意义 |
|---|---|
| 可约 | 退化的复结构，Deligne-Mumford 紧化 |
| 周期 | 某种对称的复结构 |
| 伪-Anosov | 退化的复结构，全纯二次微分的叶状结构 |

# 几个证明的对比

- Bers 的证明并不用涉及到 Teichmüller 空间的紧化，但是要用到复结构、全纯二次微分以及 Teichmüller 映射，处理这些东西都必须用很强的分析工具。
- Thurston 的证明要涉及到 Teichmüller 空间的紧化，看上去很拓扑、不需要分析，但实际上要用到测度的弱收敛，本质上还是要用到泛函（尽管包装成很拓扑的模样）。
- Nielsen 的证明是把 $f : S_g \to S_g$ 提升成 $\widetilde{f} : \mathbb{H}^2 \to \mathbb{H}^2$；再推到无穷远边界成为 $\widetilde{f}_\partial : \partial\mathbb{H}^2 \to \partial\mathbb{H}^2$，即 $S^1 \to S^1$；对 $\widetilde{f}_\partial : S^1 \to S^1$ 的不动点集进行分类。
- Bestvina-Handel 的证明只需用火车轨道这个纯组合的工具。