Detecting Negative Cycles with Floyd-Warshall

Fanbin Lu

Department of Computer Science and Engineering
Chinese University of Hong Kong

We already know how to use the Floyd-Warshall (FW) algorithm to solve the APSP (all-pairs shortest path) problem when the input graph $G = (V, E)$ contains no negative cycles.

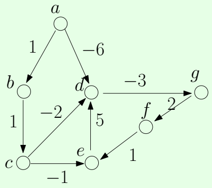
Just like Bellman-Ford's algorithm, the FW algorithm can also be used to **detect** negative cycles. For that purpose, FW runs in $O(|V|^3)$ time, which is never better than the $O(|V||E|)$ complexity of Bellman-Ford's. Nevertheless, the correctness of FW is easier to understand.

Let us start by reviewing the Floyd-Warshall algorithm.

Define *spdist*$(i, j \mid\leq k)$ as the smallest length of all paths from the vertex **with id** i to the vertex **with id** j that pass only **intermediate** vertices with ids $\leq k$.

For $k = 0$, *spdist*$(i, j \mid\leq 0)$ equals $w(i, j)$ if E has an edge (i, j), or ∞, otherwise.

Example: Suppose $a, b, ..., g$ have IDs 1, 2, ..., 7, respectively.

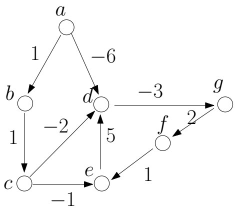


$$spdist(3, 5 \mid 0) = -1,\ spdist(3, 7 \mid 0) = \infty,$$

Example

We use dynamic programming to compute $spdist(i, j \mid \leq k)$ for all i, j, k.

First, decide $spdist(i, j \mid \leq 0)$ for all $i, j \in [1, 7]$.

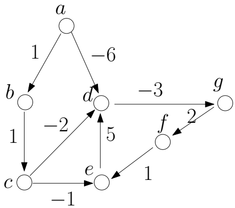


vertex v	a	b	c	d	e	f	g
a	∞	1	∞	-6	∞	∞	∞
b	∞	∞	1	∞	∞	∞	∞
c	∞	∞	∞	-2	-1	∞	∞
d	∞	∞	∞	∞	∞	∞	-3
e	∞	∞	∞	5	∞	∞	∞
f	∞	∞	∞	∞	1	∞	∞
g	∞	∞	∞	∞	∞	2	∞

Example

$$spdist(i,j \mid\leq k) = \min \begin{cases} spdist(i,j \mid\leq k-1) \\ spdist(i,k \mid\leq k-1) + spdist(k,j \mid\leq k-1) \end{cases}$$

Then, compute $spdist(i,j \mid {\color{red}\leq 1})$ for all $i,j \in [1,7]$. No changes.

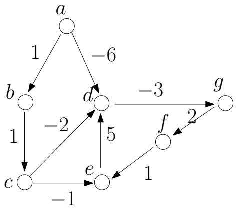


vertex v	a	b	c	d	e	f	g
a	∞	1	∞	-6	∞	∞	∞
b	∞	∞	1	∞	∞	∞	∞
c	∞	∞	∞	-2	-1	∞	∞
d	∞	∞	∞	∞	∞	∞	-3
e	∞	∞	∞	5	∞	∞	∞
f	∞	∞	∞	∞	1	∞	∞
g	∞	∞	∞	∞	∞	2	∞

Example

$$spdist(i,j \mid\leq k) = \min \begin{cases} spdist(i,j \mid\leq k-1) \\ spdist(i,k \mid\leq k-1) + spdist(k,j \mid\leq k-1) \end{cases}$$

Compute $spdist(i,j \mid {\color{red}\leq 2})$ for all $i,j \in [1,7]$.

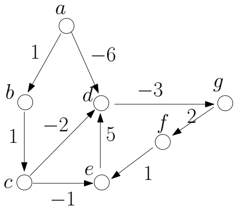


vertex v	a	b	c	d	e	f	g
a	∞	1	${\color{red}2}$	-6	∞	∞	∞
b	∞	∞	1	∞	∞	∞	∞
c	∞	∞	∞	-2	-1	∞	∞
d	∞	∞	∞	∞	∞	∞	-3
e	∞	∞	∞	5	∞	∞	∞
f	∞	∞	∞	∞	1	∞	∞
g	∞	∞	∞	∞	∞	2	∞

Example

$$spdist(i,j \mid\leq k) = \min \begin{cases} spdist(i,j \mid\leq k-1) \\ spdist(i,k \mid\leq k-1) + spdist(k,j \mid\leq k-1) \end{cases}$$

Compute $spdist(i,j \mid \leq 3)$ for all $i,j \in [1,7]$.

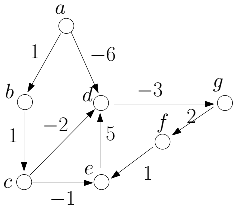


vertex v	a	b	c	d	e	f	g
a	∞	1	2	-6	1	∞	∞
b	∞	∞	1	-1	0	∞	∞
c	∞	∞	∞	-2	-1	∞	∞
d	∞	∞	∞	∞	∞	∞	-3
e	∞	∞	∞	5	∞	∞	∞
f	∞	∞	∞	∞	1	∞	∞
g	∞	∞	∞	∞	∞	2	∞

Example

$$spdist(i,j \mid\leq k) = \min \begin{cases} spdist(i,j \mid\leq k-1) \\ spdist(i,k \mid\leq k-1) + spdist(k,j \mid\leq k-1) \end{cases}$$

Compute $spdist(i,j \mid \leq 4)$ for all $i,j \in [1,7]$.

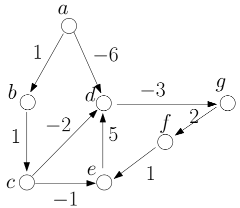


vertex v	a	b	c	d	e	f	g
a	∞	1	2	-6	1	∞	-9
b	∞	∞	1	-1	0	∞	-4
c	∞	∞	∞	-2	-1	∞	-5
d	∞	∞	∞	∞	∞	∞	-3
e	∞	∞	∞	5	∞	∞	2
f	∞	∞	∞	∞	1	∞	∞
g	∞	∞	∞	∞	∞	2	∞

Example

$$spdist(i,j \mid\leq k) = \min \begin{cases} spdist(i,j \mid\leq k-1) \\ spdist(i,k \mid\leq k-1) + spdist(k,j \mid\leq k-1) \end{cases}$$

Compute $spdist(i,j \mid \leq 5)$ for all $i,j \in [1,7]$.

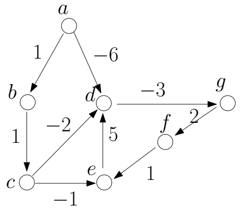


vertex v	a	b	c	d	e	f	g
a	∞	1	2	-6	1	∞	-9
b	∞	∞	1	-1	0	∞	-4
c	∞	∞	∞	-2	-1	∞	-5
d	∞	∞	∞	∞	∞	∞	-3
e	∞	∞	∞	5	∞	∞	2
f	∞	∞	∞	6	1	∞	3
g	∞	∞	∞	∞	∞	2	∞

Example

$$spdist(i,j \mid\leq k) = \min \begin{cases} spdist(i,j \mid\leq k-1) \\ spdist(i,k \mid\leq k-1) + spdist(k,j \mid\leq k-1) \end{cases}$$

Compute $spdist(i,j \mid \leq 6)$ for all $i,j \in [1,7]$.

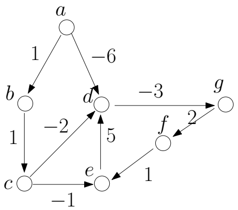


vertex v	a	b	c	d	e	f	g
a	∞	1	2	-6	1	∞	-9
b	∞	∞	1	-1	0	∞	-4
c	∞	∞	∞	-2	-1	∞	-5
d	∞	∞	∞	∞	∞	∞	-3
e	∞	∞	∞	5	∞	∞	2
f	∞	∞	∞	6	1	∞	3
g	∞	∞	∞	8	3	2	5

Example

$$spdist(i,j \mid\leq k) = \min \begin{cases} spdist(i,j \mid\leq k-1) \\ spdist(i,k \mid\leq k-1) + spdist(k,j \mid\leq k-1) \end{cases}$$

Compute $spdist(i,j \mid \leq 7)$ for all $i,j \in [1,7]$.



vertex v	a	b	c	d	e	f	g
a	∞	1	2	−6	−6	−7	−9
b	∞	∞	1	−1	−1	−2	−4
c	∞	∞	∞	−2	−2	−3	−5
d	∞	∞	∞	5	0	−1	−3
e	∞	∞	∞	5	5	4	2
f	∞	∞	∞	6	1	5	3
g	∞	∞	∞	8	3	2	5

Now we are done.

Next, we will prove

$$spdist(i, j \mid\leq k) = \min \begin{cases} spdist(i, j \mid\leq k-1) \\ spdist(i, k \mid\leq k-1) + spdist(k, j \mid\leq k-1) \end{cases}$$

LHS $\leq$ RHS is easy to prove. We will show only LHS $\geq$ RHS.

Proof: The goal is to prove

$$spdist(i,j \mid\leq k) \geq \min\begin{cases} spdist(i,j \mid\leq k-1) \\ spdist(i,k \mid\leq k-1) + spdist(k,j \mid\leq k-1) \end{cases}$$

Consider a path π from u to v that uses intermediate vertices only from $\{1,2,\cdots,k\}$ and has length $spdist(u,v \mid\leq k)$.

If k is not an intermediate vertex of π, then π has length at least $spdist(u,v \mid\leq k-1)$ (by definition).

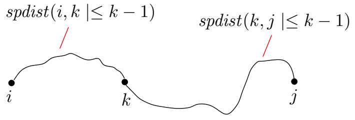
Next, we discuss the case when k is an intermediate vertex of π.

Goal: to prove

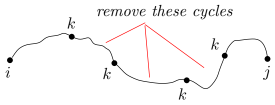
$$spdist(i,j \mid\leq k) \geq \min \begin{cases} spdist(i,j \mid\leq k-1) \\ spdist(i,k \mid\leq k-1) + spdist(k,j \mid\leq k-1) \end{cases}$$

Divide the case where k is an intermediate vertex of π into:

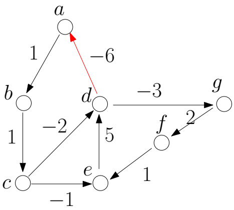
- **k appears only once on π;**



- **k appears multiple times.**



What if the graph $G = (V, E)$ contains negative cycles?



A negative cycle: $a \to b \to c \to d \to a$.

Next, we will modify the FW algorithm for negative cycle detection.

Define a **simple path** from u to v as a path π satisfying:

- π starts from u and ends at v.
- u is not an intermediate vertex of π.
- v is not an intermediate vertex of π.
- no intermediate vertex appears twice on π.

Remark: The simple-path definition allows $u = v$.

We aim to find all-pairs shortest **simple paths** instead.

Re-define $spdist(i, j \mid \leq k)$ as the smallest length of all **simple** paths from the vertex with id i to the vertex with id j that pass only **intermediate** vertices with ids $\leq k$.

The following relationship still holds

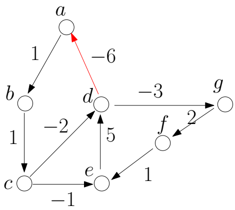
$$spdist(i, j \mid \leq k) =$$
$$\min \begin{cases} spdist(i, j \mid \leq k-1) \\ spdist(i, k \mid \leq k-1) + spdist(k, j \mid \leq k-1) \end{cases}$$

The proof is similar to the no-negative-cycle scenario and omitted.

Example:

We use dynamic programming to compute $spdist(i, j \mid\leq k)$ for all i, j, k.

For $k = 0$, $spdist(i, j \mid\leq 0)$ equals $w(i, j)$ if E has an edge (i, j), or ∞, otherwise.

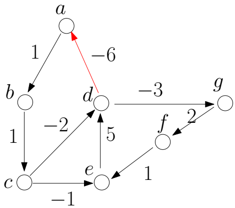


vertex v	a	b	c	d	e	f	g
a	∞	1	∞	∞	∞	∞	∞
b	∞	∞	1	∞	∞	∞	∞
c	∞	∞	∞	-2	-1	∞	∞
d	-6	∞	∞	∞	∞	∞	-3
e	∞	∞	∞	5	∞	∞	∞
f	∞	∞	∞	∞	1	∞	∞
g	∞	∞	∞	∞	∞	2	∞

Example

$$spdist(i,j \mid\leq k) =$$
$$\min \begin{cases} spdist(i,j \mid\leq k-1) \\ spdist(i,k \mid\leq k-1) + spdist(k,j \mid\leq k-1) \end{cases}$$

Then, compute $spdist(i,j \mid \leq 1)$ for all $i,j \in [1,7]$.

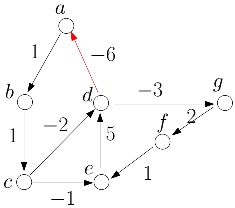


vertex v	a	b	c	d	e	f	g
a	∞	1	∞	∞	∞	∞	∞
b	∞	∞	1	∞	∞	∞	∞
c	∞	∞	∞	-2	-1	∞	∞
d	-6	-5	∞	∞	∞	∞	-3
e	∞	∞	∞	5	∞	∞	∞
f	∞	∞	∞	∞	1	∞	∞
g	∞	∞	∞	∞	∞	2	∞

Example

$$spdist(i,j \mid\leq k) = \min \begin{cases} spdist(i,j \mid\leq k-1) \\ spdist(i,k \mid\leq k-1) + spdist(k,j \mid\leq k-1) \end{cases}$$

Then, compute $spdist(i,j \mid \leq 2)$ for all $i,j \in [1,7]$.

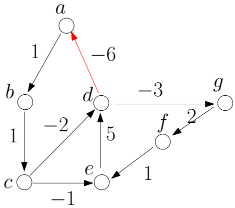


vertex v	a	b	c	d	e	f	g
a	∞	1	2	∞	∞	∞	∞
b	∞	∞	1	∞	∞	∞	∞
c	∞	∞	∞	-2	-1	∞	∞
d	-6	-5	-4	∞	∞	∞	-3
e	∞	∞	∞	5	∞	∞	∞
f	∞	∞	∞	∞	1	∞	∞
g	∞	∞	∞	∞	∞	2	∞

Example

$$spdist(i,j \mid\leq k) = \min \begin{cases} spdist(i,j \mid\leq k-1) \\ spdist(i,k \mid\leq k-1) + spdist(k,j \mid\leq k-1) \end{cases}$$

Then, compute $spdist(i,j \mid \leq 3)$ for all $i,j \in [1,7]$.

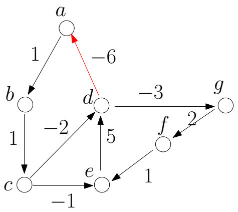


vertex v	a	b	c	d	e	f	g
a	∞	1	2	0	1	∞	∞
b	∞	∞	1	-1	-1	∞	∞
c	∞	∞	∞	-2	-1	∞	∞
d	-6	-5	-4	-6	-5	∞	-3
e	∞	∞	∞	5	∞	∞	∞
f	∞	∞	∞	∞	1	∞	∞
g	∞	∞	∞	∞	∞	2	∞

Example

$$spdist(i,j \mid \leq k) =$$
$$\min \begin{cases} spdist(i,j \mid \leq k-1) \\ spdist(i,k \mid \leq k-1) + spdist(k,j \mid \leq k-1) \end{cases}$$

Then, compute $spdist(i,j \mid \leq 4)$ for all $i,j \in [1,7]$.

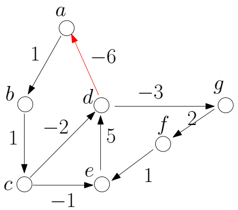


vertex v	a	b	c	d	e	f	g
a	-6	1	2	0	1	∞	-3
b	-7	-6	1	-1	-1	∞	-4
c	-8	-7	-6	-2	-1	∞	-5
d	-6	-5	-4	-6	-5	∞	-3
e	-1	0	1	5	0	∞	2
f	∞	∞	∞	∞	1	∞	∞
g	∞	∞	∞	∞	∞	2	∞

Example

$$spdist(i,j \mid\leq k) = \min \begin{cases} spdist(i,j \mid\leq k-1) \\ spdist(i,k \mid\leq k-1) + spdist(k,j \mid\leq k-1) \end{cases}$$

Then, compute $spdist(i,j \mid \leq 5)$ for all $i,j \in [1,7]$.

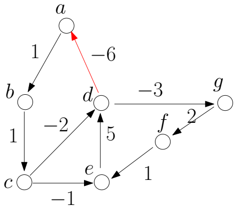


vertex v	a	b	c	d	e	f	g
a	-6	1	2	0	1	∞	3
b	-7	-6	1	-1	-1	∞	-4
c	-8	-7	-6	-2	-1	∞	-5
d	-6	-5	-4	-6	-5	∞	-3
e	-1	0	1	5	0	∞	2
f	0	1	2	6	1	∞	3
g	∞	∞	∞	∞	∞	2	∞

Example

$$spdist(i,j \mid\leq k) = \min \begin{cases} spdist(i,j \mid\leq k-1) \\ spdist(i,k \mid\leq k-1) + spdist(k,j \mid\leq k-1) \end{cases}$$

Then, compute $spdist(i,j \mid \leq 6)$ for all $i,j \in [1,7]$.

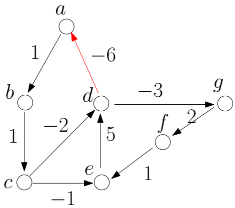


vertex v	a	b	c	d	e	f	g
a	-6	1	2	0	1	∞	3
b	-7	-6	1	-1	-1	∞	-4
c	-8	-7	-6	-2	-1	∞	-5
d	-6	-5	-4	-6	-5	∞	-3
e	-1	0	1	5	0	∞	2
f	0	1	2	6	1	∞	3
g	2	3	4	8	3	2	5

Example

$$spdist(i,j \mid\leq k) =$$
$$\min \begin{cases} spdist(i,j \mid\leq k-1) \\ spdist(i,k \mid\leq k-1) + spdist(k,j \mid\leq k-1) \end{cases}$$

Then, compute $spdist(i,j \mid \leq 7)$ for all $i,j \in [1,7]$.



vertex v	a	b	c	d	e	f	g
a	−6	1	2	0	1	−1	3
b	−7	−6	1	−1	−1	−2	−4
c	−8	−7	−6	−2	−1	−3	−5
d	−6	−5	−4	−6	−5	−1	−3
e	−1	0	1	5	0	0	2
f	0	1	2	6	1	1	3
g	2	3	4	8	3	2	5

Check the diagonal results:

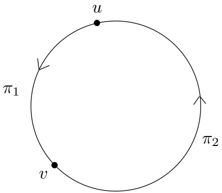
vertex v	a	b	c	d	e	f	g
a	-6	1	2	0	1	-1	3
b	-7	-6	1	-1	-1	-2	-4
c	-8	-7	-6	-2	-1	-3	-5
d	-6	-5	-4	-6	-5	-1	-3
e	-1	0	1	5	0	0	2
f	0	1	2	6	1	1	3
g	2	3	4	8	3	2	5

The graph G has a negative cycle if and only if $spdist(u, u \mid \leq n) < 0$ for some $u \in V$.

Next, we will prove that the algorithm is correct.

Proof of correctness. First, we prove that if G has a negative cycle, then $spdist(u, u \mid\leq n) < 0$ for some $u \in V$.

Consider a negative cycle C. Let u be the **largest** vertex on C, and v be any other vertex on C.



Define π_1 as the path from u to v on C, and π_2 as the path from v to u on C. Length of π_1 is at least $spdist(u, v \mid\leq n-1)$. Length of π_2 is at least $spdist(v, u \mid\leq n-1)$. Thus,

$$\begin{aligned} spdist(u, u| \leq n) &\leq spdist(u, v| \leq n-1) + spdist(v, u| \leq n-1) \\ &\leq \text{length of } C \\ &< 0. \end{aligned}$$

Proof of correctness (cont.). Next, we prove that if $spdist(u, u \mid \leq n) < 0$ for some $u \in V$, G has a negative cycle.

Let u be an arbitrary vertex satisfying $spdist(u, u \mid \leq n) < 0$. Then, there is a simple path from u to itself, with length $spdist(u, u \mid \leq n) < 0$. The simple path is a negative cycle.