

真理的探求？美的追尋！

談數學通識教育

張家麟

香港中文大學數學系

情來·算盡愛 vs 求證

2005年11月中在香港上映的電影《情來·算盡愛》，劇本改編自戴維·奧本（David Auburn）著名的百老匯劇作《求證》，該劇是2001年普立茲戲劇獎（Pulitzer Prize）及百老匯東尼獎（Tony Award）最佳劇本獎得獎作品，可謂來頭不小。劇作的廣東話及普通話版本更曾分別由香港話劇團及上海話劇藝術中心於2005年7月在香港演出過。《求證》不是一齣「數學劇」，它只是以數學家及女兒的生活為背景，刻劃人性的關愛、信任、偏執與矛盾，描寫親情、友情與愛情。電影與劇作的英文名字同為*Proof*，劇作的中譯名字《求證》與此貼近，而電影所選用的中譯名字，在很大的程度上，標示著商業的考慮，同時也反映出社會上很多人對數學的看法：數學不是吸引的東西，「計算」已非易事，「證明」更令人望而生畏！

計算和證明，與數學有不可分的關係，數學有其獨具的符號語言和抽象思維，這是它的特質。計算時，符號公式背後的意義弄不清楚，便容易紕漏出錯；論證時，抽象的推理沒有清晰的理念導引，

便容易困惑迷失。然而，數學不應被視作繁複符號與艱深計算的綜合體。符號與計算絕對不能代表數學，正如「調色」絕對不能當作「繪畫」一樣，它們只能算是將數學的思維、技巧、推理及深刻的內涵抽離後的產物。同樣，僅僅把數學看作是一種抽象求證的方法，亦如同把梵高（Vincent van Gogh, 1853—1890）的「向日葵」看作是畫布上的顏料組合一樣，失卻了它的真正意義。

「數」通「識」廣？

千百年來，數學一直是吸引着眾多聰明人投身的學科，除了有趣、可以挑戰智能外，它與各學科的關係密切、應用廣泛也是主因之一。事實上，數學的概念、方法和結論已成為很多現代重要學科的基礎。這些學科的成就大小，往往取決於它們與數學結合的程度。在學科中，表面看似毫無關聯的現象，在數學理論的牽引下，逐漸變得條理清晰，因果有序；堆積着分崩離析事實的框架，在數學思想的滲透下，逐漸演化成結構緊密、充滿活力的有機體。

數學有著悠久的歷史，這是它的另一特質。一般的大學生，如非以理、工作為專業的話，他們的數學知識大都還停留在十九世紀中葉的數學成果上。要理解數學在現代社會中所扮演的角色，談何容易。數學通識教育的目的，正是要從一個較為非技術性的層面，向學習者介紹種種影響深遠的數學概念與思想，讓他們了解數學發展與現代社會之間既深刻又微妙的關係，令他們體會到，一直以來數學是文化形成的主要力量，並進而欣賞它作為人類文化中不可或缺的價值。一言以蔽之，就是讓學習者理解「數學之用」，欣賞「數學之美」，體會「數學之道」！

本學年，筆者教授的中大數學通識科目有「博奕和策略思想」及「數學賞析」。要把浩如煙海的數學資料，剪裁出一個既能引發學習

者興趣，又能切合大學通識教育目的，還要照顧學習者不同背景的數學通識科目，是一個充滿挑戰的有趣經歷。筆者僅就年來任教數學通識所得，與讀者分享個中經驗。

「數學之用」——「博」馭古今！

從古到今，在競爭激烈、講求效益的人類社會中，人生、工作與事業都有如商戰博奕。要在強敵環伺下運籌帷幄，決勝千里，殊非易事。必須積極籌劃，洞察人性，知己知彼，才有勝望。要駕馭人性，百戰百勝，先賢留下的《孫子兵法》、「36計」與《三國演義》自然是無價的瑰寶，君不見《孫子兵法》被列為國際經濟領袖的誕生地——哈佛商學院——的必讀之書？然而先賢恐怕沒料到，在二十一世紀的今天，數學會成為研究人類理性行為的學問。

2005年度諾貝爾經濟獎已在10月初揭盅，「博弈論」（Game Theory）這門應用遍及社會各層面的現代數學又下一城。瑞典皇家科學院讚揚獲獎的兩位「博弈論大師」奧曼（Robert J. Aumann）和謝林（Thomas C. Schelling）的「博弈理論分析，加強了我們對衝突和合作的理解」，有助「解釋價格戰和貿易戰等的經濟衝突」。而奧曼這位創立「無限博弈理論」分析的學者，是一位出身於麻省理工（MIT）的數學家！數學家奪得諾貝爾經濟獎已經不是首趟，天才橫溢的納殊（John Nash）便同樣憑著博弈論的研究在1994年摘取了諾貝爾經濟獎的桂冠。他的傳奇事迹更被編寫成書——《有你終身美麗》，並拍成同名電影。

「博奕和策略思想」就是專為介紹「博奕論」這門現代數學分支的思想與方法而設計的數學通識課。以基本的矩陣運算和簡單的概率知識作基礎，學習者可學習靜態與動態博奕的理論，衡量群體與個人

的利益衝突，進而研究在互動的競爭過程中，如何訂定最佳策略。拍賣、議價，談判、以至生物演化等現象都在討論之列。

在教材選取上，美蘇裁軍、軍備競賽和「情侶博奕」都是說明博奕理論中「囚徒困局」、「納殊平衡」等重要概念的有趣例子。「智豬博奕」中，小豬如何以逸代勞，以「四兩撥千斤」的致勝之道巧勝大豬，令人深思。利用不完全信息博奕的現代詮釋，剖析《三國演義》中諸葛亮如何利用資訊的差異，以「空城計」智退魏師，險中求勝。有興趣的話，還可討論「重複博奕」與學習認知的關係。這樣的一個貼近生活，多姿多采，充滿「數學之用」的課程，自然是數學通識課程設計者應大力發展的。

「歷史在博奕嗎」？數學思維如何助人「博」馭古今，這大概是值得學習者終身思考的課題。

「數學之美」—— 兼收並「賞」

假如設計「博奕和策略思想」所強調的是「數學之用」，則設計「數學賞析」這門數學通識課所應強調的是「數學之美」，它包括「結構之美」與「創造之美」。

數學最易為人覺察的，是它的「結構之美」。欣賞M. C. Escher的畫作，便會深深感受到作者如何通過幾何的對稱，精確的組合和雋永的結構，讓這種結構之美展示出來。另一方面，觀看令人眼花繚亂、目眩神迷的分形幾何（Fractal Geometry）圖案，則是另一種美的經歷。描述這些優美幾何現象的數學概念，自然充滿「結構之美」。而以精煉的、特有的符號公式，陳述有關的數學知識和妙題巧解，則是對「結構之美」的更深一層體現。

眾所周知，數學的知識是以「公理化」方法確立的。這種方法包

括明確地給要討論的概念下定義，準確地表述出作為推理基礎的公設。從這些定義和公設出發，依嚴密的邏輯導出結論。整個過程，給人以完備的結構美。除此以外，在證明和得出結論的過程中，運用不可少的想像和直觀也同時為論證者帶來高度的、美學上的滿足。

如果把「數學的創作」看成藝術創作，當中「美的組成」和「作品特徵」包括洞察力、想像力，以及達至目標所用的適切精確的手段，那麼數學就是一門具有其獨特「創造之美」的學科。要體會這種「創造之美」，除了自己動手「創造」外，求助於數學史，閱讀數學家的「創造史」也能領略個中的妙蘊。

有「理」終身「美」麗

數學中一些偉大的成就，是為了解決純智力的挑戰而產生的，數學家的數學創作，往往亦源於此。換句話說，創作的原動力是對「美的追尋」和接受「智慧的挑戰」。羅素（Bertrand Russell）曾說過：

數學，如果正確地看它，則具有……至高無上的美——正像雕刻的美，是一種冷而嚴肅的美，這種美不是投合我們天性的微弱的方面，這種美沒有繪畫或音樂的那些華麗的裝飾，它可以純淨到崇高的地步，能夠達到嚴格的只有最偉大的藝術才能顯示的那種完美的境地。一種真實的喜悅的精神，一種精神上的亢奮，一種覺得高於人的意識——這些是至善至美的標準，能夠在詩裏得到，也能夠在數學裏得到。¹

1 轉引自M. Kline著，張祖貴譯：《西方文化中的數學》（上海：復旦大學出版社，2004年），頁4。

掀開數學史，閱讀1995年之前的三百五十多年間，數學家如何競逐解決「費馬最後定理」的歷史，將對了解以上所述的「美的追尋」有所啟示。

「數學之道」—— 數學與文化

數學是一棵植根於社會文明，富有生命力的樹，它隨著文明的衰盛而枯榮。數學通識設計者，總希望為學習者繪畫一幅數學發展的素描，這幅素描雖然簡略，仍可讓他們認識到數學一直是文明和文化的重要組成部份，體會到何謂「數學之道」。要達到這個目的，必須有賴設計者平日的細心觀察，在教學上多花心思。選擇合適的教材，亦至為重要，它的作用就有如一面鏡子，讓學習者從不同的角度，觀照出數學與不同文化之間的緊密聯繫。

就以劇作《求證》(或電影《情來算盡愛》)作為例子，劇中曾提及十八世紀法國女數學家蘇菲·姬曼(Marie-Sophie Germain, 1776—1831)的事迹。由於受到古希臘偉大數學家阿基米德(Archimedes)事迹的激勵，遂令她終生傾情於數學研究，而她和數學王子高斯(Carl Friedrich Gauss, 1777—1855)的交往，也是數學史上的一段佳話。1804年，她看了高斯的著作*Disquisitiones Arithmeticae*以後，便以「白先生」(M. LeBlanc)的署名和高斯通信，交流數學。相傳羅馬帝國入侵古希臘時，阿基米德正沈醉在一道幾何問題，對已經攻入城內的羅馬士兵渾然未覺，就莫名其妙被殺死了。當普法戰爭爆發時，姬曼恐怕歷史會重演，高斯會如同阿基米德般被殺，於是她便設法委託一位有力人士，出面保護高斯。

在這齣話劇(或電影)裏，憑一段男女主角的對話，便牽引出一段復一段的複雜材料，讓學習者能讀出興味來，繼續追索下去，這便是

上佳的教材。也許他們追尋的是高斯和姬曼時期的歷史或數學史；也許他們察覺到由於姬曼是女性，以致被當時的高等院校拒諸門外，因而引發他們對自古以來，女性所受不平的待遇作出反思；也許他們有興趣研究古希臘人與古羅馬人在思想上的差異，導致二者在文化與數學上不同的發展。當然，在數學科本身，也可作類似的探究，教師可引導學習者沿著「『蘇菲·姬曼質數』(Sophie Germain Prime) 是否有無窮多個」的問題繼續探索下去。

廣而言之，「數學之道」是一種理性的探索精神。正是這種精神，使得人類的思維不斷趨於完善。亦正是這種精神，深深地影響著人類的物質與精神生活。它試圖回答人類在追尋真理的過程中所遇到的種種問題，努力去認識和理解自然，發揮文明生活的最完美內涵。

結語

筆者教授數學通識課程的日子尚淺，但正如蕭文強教授在《求證》的場刊上所言：「在數學上做了點點滴滴的工夫，雖然不是人人名傳後世，但在某種程度上這些工夫都推動了學科向前進展。各人的成果綜合於總體中，個人的貢獻在這總體形成過程中被溶化了。」只盼望我這「點滴的嘗試」能對學習者有所啟迪。

參考書目

1. M.克萊因著，張祖貴譯，《西方文化中的數學》，上海：復旦大學出版社，2004年。
2. 蕭文強，〈數學才華——以平常之心看待「平庸」〉，《求證》2005年7月演出《場刊》。

