

國小速度概念任務設計與教學實驗研究

陳嘉皇

國立台中教育大學數學教育學系

本研究旨在透過國民小學在職教師利用學習軌道（learning trajectories）理論設計速度概念之任務，進行教學實驗，探討學生對速度概念的表現；再經由教學實驗的回溯省思，探討教師如何修正速度概念的學習軌道。研究對象為台灣中部地區公立小學一班六年級學生，利用觀察與錄影記錄師生互動內容，提供事後回溯及省思的參考，採用質性分析方式處理以下資料：課室師生對話、學生解題表現、教師省思與課後學生訪談記錄。研究發現：（1）經過學習軌道理論設計的課程與教學實驗後，學生對乘除作業判斷的時機及計算、距離與時間換算、快慢判斷、利用平均速度運算速度單位等表現良好，低分組學生對除法應用小數及分數方式尚需加強，轉換單名數的分數與描述兩單位間的關係、單位轉換存有困難，解題過程表達不甚清楚。（2）經由速度之學習軌道教學實驗後，可證實學習軌道教學模式的效果，提供學生速度概念和解題能力教學運用。研究者針對研究發現提出建議，以作未來速度單元教學或研究的參考。

關鍵詞：速度；教學；專業發展；學習軌道

緒論

台灣九年一貫課程綱要（教育部，2008）強調教師應協助學生發展數學能力，以流利的運算和概念的理解為基礎，進一步尋找途徑和方法，解決生活周遭的問題。速度的問題與生活情境息息相關，有助學生建構上述目標能力。然而速度對國民小學（下稱國小）學生而言是抽象議題，因為它結合「時間」與「距離」兩項數學概念，時間屬工具量，涉及的概念抽象，無法透過感官判斷掌握，須藉由計時工具測量才能獲得；距離是長度的數學量，可透過感官經驗體驗及比較。兩者組合一起，形成另一數學概念——速度。速度與時間同是工具量，兩者建基在「刻度上變化的相對性質」（鍾靜，1998）。因為概念抽象，致使學生產生許多迷思概念，例如時間量感不足、大時鐘的面積大所以分針會比小時鐘所花的時間長、1 小時是 100 分鐘、移動的距離

愈遠所花的時間愈長（蕭志芳，2003）。速度概念透過時間、距離的比較，最後結合呈現為二階單位（單位時間所經過的距離）。在學習過程中，需利用除法化成同樣的單位比較基礎，才能決定速度的快慢；若運算時使用的數字與分數及比例的概念結合，對學生而言更顯困難。

學生學習速度及單位換算錯誤的原因非常複雜，包含任務設計、學生個體認知發展與教學方法訓練等相關因素（Tourniaire & Pulos, 1985），這些皆與 Ball, Thames, & Phelps（2008）所強調教師需要的數學教學知識（mathematical knowledge for teaching）有關。若教師數學知識不足、教學目標不清、課程設計不佳，那麼學生的數學表現將受影響，學生不僅會有學習困難，還會對學習造成厭倦與無助。對教師而言，給予學生經驗和回饋，使他們學習到與目標一致的概念和技巧，是數學教學的重點，但要有效對應學生的需求，則必須透過合宜的模式介入。學習軌道（learning trajectories，下稱 LTs）可幫助教師發展所需的數學和教學知識，界定學生能夠在軌道上進行學習的方法。Clements & Sarama（2004）這樣解釋 LTs：描述學生在一特殊數學領域裏的思考和學習，透過相關教學工作設計，將學生的心智步驟或假設行動做臆測路徑，創造支持學生在數學領域的學習目標，使學生沿着一發展性的思考層次前進。LTs 的精髓在於實施課程材料的進程時，以學生既有學習心智表現為基礎，教師教學前須先設計課程，臆測學生思考，理解學生想法及解決問題的方式，採取統整宏觀的形成性評量歷程，探索、設計、解決與擴展學生的學習經驗，最重要是強調 LTs 各航點活動的設計必須環環相扣、緊密連結，才能協助學生達到學習目標。LTs 理論貼近班級教學與學生學習的需求，因此本研究藉由一位國小現職教師利用 LTs 為教學理論的基礎，透過速度概念任務設計與活動安排，進行教學實驗，以期學生在速度概念能有效學習。

本研究探討以下問題：

1. 經由 LTs 理論為主的任務設計與教學實驗後，學生對速度概念的表現為何？
2. 經由教學實驗回溯省思，教師如何修正速度概念的 LTs？

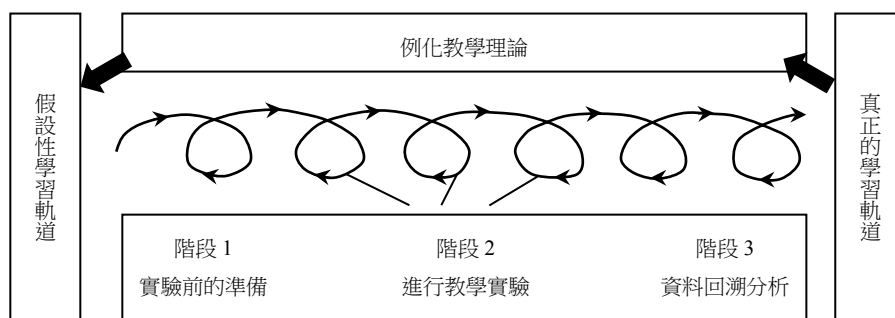
文獻探討

LTs 理論及發展

LTs 理念來自於真實數學教育（realistic mathematics education）的情境或真實世界的問題，使用預想性的課程設計實驗，透過重要的數學理念和目標，推測學生可能的學習路徑，順着這樣的路徑支持和組織學生學習。Clements & Sarama（2004）指出許多成功的數學課程發展、數學學習與教學研究，都採取 LTs 的概念。LTs 的形成

涉及：(1) 對學生在某重要數學觀念之學習與路徑的臆測，(2) 支持沿着此一路徑進行教學活動的臆測。LTs 包含學習目標、計畫教學的活動及預測的學習步驟，給教師進行數學概念的發展，且理解可引發學生學習的內容(陳嘉皇，2015；Gravemeijer, 2004)。教師對班級活動的解釋，影響未來課程的計畫，透過對真實 LTs 的理解而塑造自己的教學信念，並在反身性、迭代的歷程中修正教學實務。這循環活動可視作一系列教學實驗，LTs 會在此多元狀態下進行檢驗、精煉，並對後續的 LTs 持續修正與發展。Gravemeijer (2004) 主張每種數學議題的 LTs 執行會經歷三個階段：實驗準備、教學實驗、回溯分析(見圖一)。

圖一：LTs 執行的歷程



資料來源：參考 Gravemeijer (2004)。

實驗前的準備

教師藉由經驗想像學生的能力，設計學生可以理解的學習活動，建構預期性的教學實驗。這些實驗反映教師對所建構 LTs 的臆測，如何進行嘗試、意圖和改善設計的活動。教師需要對學生學習本議題設定明確的教學目標：學生能理解速度的意義並進行概念的轉換，然後想像學生學習速度所需擁有的相關數學概念和能力，例如「距離換算」、「時間換算」、「比與比值」、「平均速度」的知識，針對這些數學知識選擇合適的教材與方法設計教學活動，包含符應學生認知發展的內涵與學習規範的建議，並臆測推演學生學習這些活動的順序。

進行教學實驗

教師檢驗和修正之前設計的一系列教學活動，臆測和檢驗學生的心智表現與支持這些表現所採取之特殊策略兩者的關係。當臆測產生支持或受到反駁，另一新的臆測

就會順勢發展並被檢驗，不斷產生小型循環歷程，直至最終產生結果。教學實驗包含檢驗預期的目標、教學活動的執行、教室裏進行事物的觀察和分析，以及評量的臆測。

資料回溯分析

LTs 的目標不同，回溯分析的內容亦不同。回溯分析在於重構改善 LTs，以教學實驗的迴圈為基礎，雖然各有不同重點，但彼此連結可有助實驗期間整體蒐集資料的比對和驗證。資料回溯分析於教學準備階段即開始，持續進行至 LTs 建構完成。因此，蒐集教室裏進行甚麼，以及對臆測和修正活動的理由的資料最為基本。回溯分析能為 LTs 蒐集的資料提供創造與系統分析的機會，亦能對新議題產生的資料進行回饋，探究實驗期間或外在發展獲得的啟示。

Confrey, Maloney, Nguyen, Mojica, & Myers (2009) 認為，LTs 建構學生面對教學（例如活動、任務、工具、交互作用的形式及評量方法）之一種以研究者臆測、實證支持的描述，透過表徵的精緻化、釐清與省思，隨着時間從非正式的概念朝向更加複雜概念的轉移。Corcoran, Mosher, & Rogat (2009) 認為 LTs 幫助教師形成概念結構並適應每位學生不同階段的需求，引導調整改善教學，以朝向目標進展。Daro, Mosher, & Corcoran (2011) 蒐集 18 種不同數學議題的 LTs，指出這些 LTs 在範圍、細微大小、錯誤概念的運用及細節層次都不同，亦指出作業在 LTs 裏扮演的角色亦不同。陳嘉皇 (2005) 指出，良好的 LTs 在數學領域對教師提升學生數學概念發展的貢獻如下：

1. 協助教師對於新的作業，深入理解學生所需的能力或精熟度。
2. 釐清令學習歷程混淆的因素，增進學習活動順序產生的效果。
3. 對學生在學習歷程中所產生的困難提供額外路徑及資源，幫助他們利用不同策略與方法解題，擴充經驗與技巧。
4. 對學習作業的內涵，容納多樣複雜的概念，協助進行統整、連貫的學習，以獲得更加完備的知識。
5. 配合學生不同的學習風格，安排適當刺激與學習材料，塑造有意義且具人文觀點的學習情境。
6. 選擇安排的教學內容可擴充學生的認知要素，增進以認知為主評量的效果。
7. 設計執行的教學活動可激發學生溝通的學習心智，培養民主素養及合作學習的精神，擴展學習理論基礎。
8. 在教學實務上，可幫助教師思索學生概念發展的優缺點，配合近側發展的鷹架作用，提升學生學習潛能。

根據上述說明，作者認為利用 LTs 的理論可提供速度學習內容設計的參考架構，對教材進一步分析，尋找適合學生的學習路徑，了解學生課堂學習狀況，重視師生

解決問題的互動及回饋，提升學生的數學概念。而 LTs 的回溯更提供教師在面對學生數學思考與問題解決表現的進一步理解與省思，針對不同程度的學生實施輔導，擴充學生的學習經驗。

速度概念的發展與進程

速度概念主要來自長度與時間兩種量結合而成，表示物體移動的快慢。在台灣，九年一貫課程（教育部，2008）提及長度能以感官形成量感，但對時間的議題則需仰賴工具和計時的約定，兩相結合產生速度。速度與時間有類似的特性，不易掌握，而且這一類量感建立常會因為個人感覺或生活事件不同，而產生不同的量感（鍾靜，1998）。

Schwartz (1988) 從量的性質區分為外延量 (extensive quantity) 及內涵量 (intensive quantity)，前者是一般單一向度的量，能直接相加或一再堆積延展；後者由兩個向度組合而成，結合兩個外延量之間的比值，含有單位測度或屬性密度的意思，如：速度、密度等。從物體移動的概念中，速度具有平均的概念，每單位時間移動多少，因此又稱平均速度。可以記錄成：

$$\text{速度} = \frac{\text{距離}}{\text{時間}} \quad \text{或} \quad \text{距離} = \text{速度} \times \text{時間}$$

學生學習速度容易忽略時間因素，總認為距離的概念即可判斷速度；亦有部分學生忽略距離因素，而以時間少、較早到達來判斷快慢。Piaget (1969) 的研究表示，時間是在不同速度下移動的統合，要真正了解速度概念，必須同時考慮時間與距離兩項要素及兩者的比率關係。用距離除以時間來表示速度，亦屬於比值的問題，例如：50 km 的路騎了 2 小時，前項除以後項比值為 25；另外涉及不同距離單位及不同時間單位，學生在不同單位之間的轉換，需要能清楚進行單位之間的連結、化聚，這提高了對學習速度的難度。鍾靜、盧炳寰、林素微 (2001) 認為速度教學有三個層次：

1. 現象分析——指兩物體在同一時刻、同一地點開始移動，就其終點行為觀之，誰先到達終點線或誰移動的距離比較長；這種現象分析屬於直接比較，不需要透過數字記錄來做判斷，是一種直觀的判斷。
2. 一維分析——指當兩物體不能在同一時刻或同一起點開始移動，需藉由固定時間探討所走距離或由固定距離探討所需時間來判斷，以比較了解速度的關係。
3. 二維分析——指平均速度，代表距離和時間的平均值。換言之，學生需要算出單位時間物體移動的距離，並以此為判斷快慢的依據。

常見速度導出單位有三種：秒速、分速和時速；記錄格式亦有三種：時速 50 km、速度是每小時 50 km、速度是 50 km/小時。例如甲學生 100 m 跑 15 秒，乙學生 60 m

跑 10 秒，兩者比較在概念上涉及比例運思，即 100:15 和 60:10 的比值大小問題，可以寫成 $\frac{100}{15}$ 和 $\frac{60}{10}$ 。此比值大小即是學生在進行二維分析，透過平均速度的概念所呈現的「每秒鐘跑多少 m」。學生對速度常見的解題策略分為四種類型（鍾靜等，2001），解題策略如表一。

表一：關於速度常見的四類型解題策略

類型	比較基礎	解題過程
A 型	以 1 秒為比較單位	$100 \div 25 = 4$ (m/秒) vs. $50 \div 10 = 5$ (m/秒)
B 型	以 1 m 為比較單位	$25 \div 100 = \frac{1}{4}$ (秒/m) vs. $10 \div 50 = \frac{1}{5}$ (秒/m)
C 型	以 100 m 為比較單位	25 秒 vs. $10 \times 2 = 20$ (秒)
D 型	以 25 秒為比較單位	100 m vs. $50 \times 25/10 = 125$ (m)

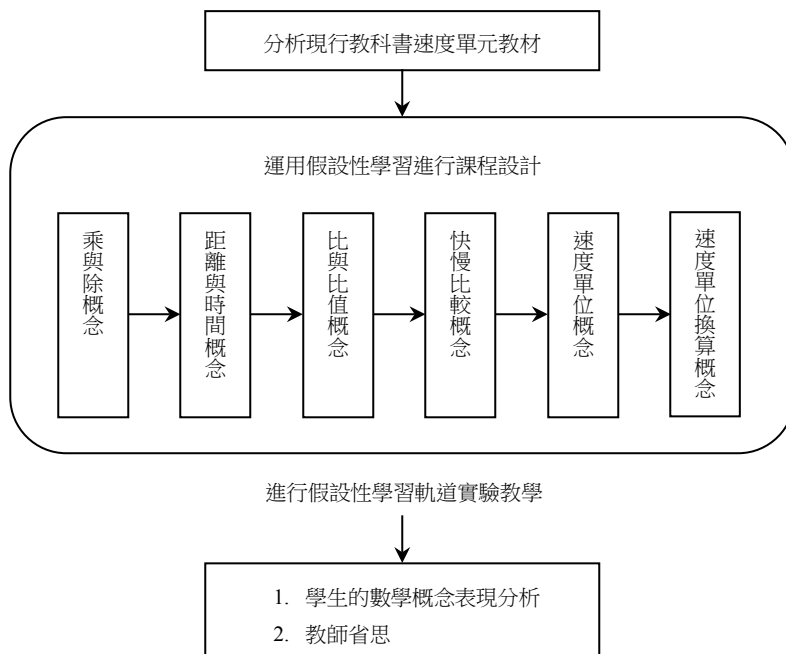
資料來源：鍾靜等（2001）。

A 與 B 型為單位時間移動的距離（以 1 秒為單位），或移動單位距離（以 m 為單位）所需時間，問題背後隱含物體移動的快慢要保持一定，是具有比率概念的解題策略。C 與 D 型則以甲為基準量，乙物體同樣要化成 100 m，以距離的等倍數來比較時間，甲花了 25 秒，乙花了 20 秒；或化成同樣的 25 秒時，以時間的等倍數來比較距離，甲走了 100 m，乙走了 125 m。因此學生需掌握距離與時間等比的共變性關係，才能解決速度的問題。學生對速度概念的學習，基本上有一個順序：從直觀的現象比較，到固定距離或時間進行的一維分析，最後是合併處理距離與時間的二維分析。國小學生在學習速度二維導出單位時，需要較高的表現層次及解題策略。鄭以仁（2006）針對小六學生速度文字題測驗的研究指出，學生對二維分析的通過率明顯較低，所以教師引導學習速度時，應留意從一維分析進入二維分析時能力的發展，教材呈現盡量貼近學生的生活經驗，提供具體的問題，呈現文字描述、表格對照、距離與時間的關係圖，協助學生思考，建構出正確的數學概念。鑑此，本研究擬以 LTs 理論的精髓為基礎，參考學者的研究資料（鍾靜，1998；鍾靜等，2001），設計速度概念活動，整合速度學習目標，融入速度解題策略運用，進行教學實驗，提供學生有系統的學習，期能在速度 LTs 的進展中，透過學生的解題表現，了解速度概念的教學成效，進而探討速度教學合適的模式，以作日後課程設計與教學實施的範例。

研究方法與步驟

為達成研究目的，研究者參考 Confrey et al. (2009) 與 Gravemeijer (2004) 的主張設定研究架構，如圖二所示。

圖二：速度的研究架構



為形成軌道與目標的初步設定，先行分析現有教科書的速度單元，了解教科書對學生學習可能的限制及困難，彙整速度概念學習應達成的目標與適當的學習路徑（圖二）。依 LTs 的觀點，在教學實施時，教師特別注意作業的目標和學生能力間關係的檢驗，描述發展的認知過程。最後，藉由教學實驗實施情形，提供教師教學、課程設計及評量上的省思。

研究對象

研究對象為台灣中部地區一所公立小學六年級一班的學生，該校班級數為 20，全校學生人數約 550 人。學區家長以農業為主要職業，社經背景多屬中、低收入家庭，外籍配偶與單親家庭近三分之一。多數家長會為子女安排課後照顧或數學補習，但整體學生的數學能力表現較市區學校學生低。參與教學實驗的學生有 28 名（男生 15 位，女生 13 位），採用異質方式以 2 人一組進行討論教學，再依學生認知能力及數學表現，從低、中、高分組分別選出 2 組學生（各 4 人），計 12 人進行訪談。受訪學生資料如表二所示。低分組學童特徵為學習及理解能力不佳，數學評量成績屬後 30% 的學生；中分組學童的特徵是數學理解能力尚可，但解決問題粗心或思考緩慢，數學評量成績屬中等；高分組學生則是數學學習及思考能力良好，且數學評量成績在班級中屬於前 30% 的學生。

表二：受訪學生資料

樣本代號	成就表現	性別	學生特質說明
S01	高	女	個性溫和文靜，學習專注力佳，課堂上較不主動發言，作業表現良好，各科平均表現佳。
S02	低	男	開朗熱心，數學理解力弱，學習缺乏信心，計算錯誤率高，對數學有些微的排斥。
S03	中	男	活潑直爽，課堂上參與度高，愛發言，常需提醒適度機會留給其他同學，草率及專注力不夠，學習表現中等。
S04	低	女	活潑熱心，但學習被動，常遲交作業，數學作業常利用下課時間補寫，學習表現不理想。
S05	高	女	活潑思考，反應靈活，學習理解快，作業表現良好，課堂上能舉手發言，各科學習表現佳。
S06	低	男	溫和安靜，上課守規，作業能認真完成，課堂上發言較被動，思考及反應較慢，易粗心。
S07	高	女	文靜，上課專心，作業細心，各科表現良好，課堂上較害羞，需引導才能小聲表達想法。
S08	中	女	溫和內向，學習態度較被動，常缺交作業，常利用下課補寫，學習表現時好時壞。
S09	高	男	活潑開朗，學習理解能力佳，作業完成認真，各科表現良好，課堂學習較不主動發言。
S10	中	女	安靜沉默，課堂學習能專注，但偶爾會忘記帶作業，作業正確情形良好，但成績表現中等。
S11	中	男	平時較安靜，課堂較不主動發言，但對科學類或有興趣的主題會表達意見，作業及成績表現中等。
S12	低	女	內向文靜，上課會靜靜地聽，但較少表示意見，數學理解能力較弱，數學作業正確率不高，常需額外指導才能順利訂正，數學以外科目表現中上。

本研究教學實驗由該班導師執行，教學方式為一天一節課共 6 節課，教學時間利用學校晨光時間（早上 7 時 50 分至 8 時 30 分）進行；教學實驗後，從教學錄影中檢視師生互動情形，配合學生學習單內容進行學生訪談，分析答題概念及使用的解題策略，檢視任務設計須改進的部分，以作日後教學設計的參考依據。

速度教材分析及 LTs 安排

速度概念可透過移動的距離與時間進行乘除換算，表示單位時間物體移動的距離，形成速度的導出量單位（距離／時間），因此，學生學習速度需具備的能力如表三所示。

表三：學習速度概念學生應具備的能力

具備能力	具備該能力的理由	速度概念關聯性
距離（長度） 單位換算 能力	<ol style="list-style-type: none"> 1. 速度一維比較，時間相同需比較距離。 2. 兩種不同距離單位，含有小數或分數的距離或以複名數表示，需換成相同單位才能比較。 3. 速度二維比較或換算時，需轉換相同距離單位。 4. 長度單位換算時常概念不清。長度單位有 10 倍、100 倍、1,000 倍的關係易混淆。 5. 長度單位換算時計算錯誤，來自計算不熟練或沒有數感，無法判斷結果是否明顯錯誤。 	<ol style="list-style-type: none"> 1. 速度的表達與物體移動的距離遠近或長短有關。 2. 距離（長度）單位有 cm、m、km，應用在速度上最常見為 m 和 km。
時間單位 換算能力	<ol style="list-style-type: none"> 1. 速度一維比較，距離相同需比較時間。 2. 時間單位不同或含有複名數時，需換成相同單位才易比較。 3. 速度二維比較或換算，時間單位轉換須具備清楚的時間概念，才不易出錯。 4. 複名數與單名數互換，以及含有分數或小數的時間轉換。秒與分為六十進位，牽涉分數或小數表示時，容易與十進位混淆。 	<ol style="list-style-type: none"> 1. 速度的表達與時間使用多少有關。 2. 時間單位，生活中常見單名數或複名數交替使用。
快慢判斷 能力	<ol style="list-style-type: none"> 1. 透過感官察覺物體運動的快慢：能透過感官活動感覺物體的快慢。 2. 固定距離（時間）下，利用時間（距離）判斷快慢：能用時間（距離）長短，描述物體在固定距離（時間）內的運動速度；能用距離（時間），描述物體在固定時間（距離）內的運動速度。 	<ol style="list-style-type: none"> 1. 速度的直觀比較需判斷快與慢。 2. 限制條件下的快慢比較有二：一定距離下，早到達終點較快；一定時間內，跑得遠較快。 3. 兩種方式描述的速度快慢不同，一個距離長，較快；一個花的時間少，較快。
乘除運算 能力	<ol style="list-style-type: none"> 1. 距離及時間單位換算時，須具備乘除能力。 2. 速度一階單位表示時，找到距離與時間的比，需化為同時間或同距離來比較時，需要乘除運算。例如：5 km : 2.5 小時化為 1 km : 0.5 小時或 2 km : 1 小時。 3. 速度二階單位表示時，距離、時間、速度單位的化聚。 4. 距離、時間、速度關係的轉換。速度 = 距離 ÷ 時間；距離 = 速度 × 時間；時間 = 距離 ÷ 速度。 5. 學生在概念混淆下，不知何時該乘或除。 	<ol style="list-style-type: none"> 1. 距離時間換算時須具備乘除運算能力。 2. 計算速度複合單位及不同速度單位的化聚。 3. 距離、時間、速度三者關係的轉換需使用乘除運算。
比與比值 （分數計算） 能力	<ol style="list-style-type: none"> 1. 速度一階單位表示時，距離與時間的比，可以用簡單整數比來呈現距離時間的關係。 2. 利用速度一階單位進行比較時，可用距離與時間的比，化成同時間或同距離來比較。 3. 速度二階單位表示為距離與時間的比值，即距離除以時間。學生須從比值概念帶入距離與時間的比值。 4. 速度二階單位計算上，常用分數運算。常利用約分將數字化簡；為避免計算上有除不盡的可能，結果常用分數呈現。 5. 學生對相等的比，運算時該乘或除，易混淆。 	<ol style="list-style-type: none"> 1. 距離與時間的比，前項距離除以後項形成的比值即為速度複合單位。 2. 比值計算常用分數呈現，且不需考慮除不盡的問題。

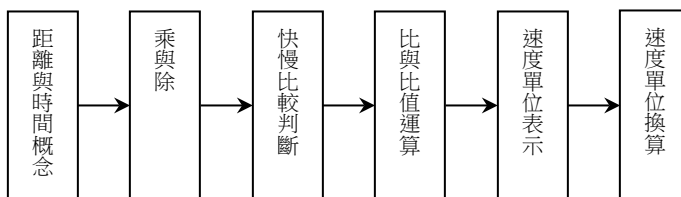
表三（續）

具備能力	具備該能力的理由	速度概念關聯性
通用速度 複合單位 (二階單位) 描述快慢 能力	<ol style="list-style-type: none"> 1. 學生需理解速度是物體移動的平均速度，才能在同單位下，比較數字大者速度快，數字小者速度慢。 例如：每秒 10 m (或 10 m/秒)、每秒 20 m (或 20 m/秒)，後者速度快。 2. 學生需理解平均速度主要有三種：分速、秒速、時速。生活中利用二階單位描述的速度有每秒多少距離、每分鐘多少距離、每小時多少距離。距離常用的單位有 cm、m、km，組合起來有其複雜度，學生易混淆。 3. 學生易混淆是距離除以時間或時間除以距離。 4. 速度複合單位中，已知速度和距離，求時間，學生概念不清時，誤算成距離 × 速度。 5. 學生對新單位不熟練，複合單位常標示錯誤。 	1. 同時用距離及時間描述的速度複合單位，產生了平均速度概念來描述快慢。
不同速度 單位換算 能力	<ol style="list-style-type: none"> 1. 不同時間單位的速度表示，常與生活中的常用表示有關。例如：汽車 80 km/小時、跑步 150 m/分，須具備換算能力才能進行比較。 2. 能換算不同單位速度，才能解決生活中的速度問題。 例如：跑步的時速，一定距離需要花幾分幾秒才能跑完。 3. 不同單位換算時，在距離單位及時間單位中，何時該乘或除，學生常會混淆。 	1. 生活中不同的物體移動，其速度所使用的單位不同，如行車及行人。須具備換算才能比較。

在這些能力中，距離與時間兩者的換算在於檢測學生單位概念的轉換，確認學生是否熟練轉換，而對不精熟或表現層次較低的學生，提供複習的機會，因此兩能力可合併為一項活動。經分析後，教師臆測學生的 LTs 需包含乘除、距離與時間的換算、比與比值運算、快慢比較判斷、速度單位表示、速度單位換算（見圖三）。

教師採用此路徑進行教學實驗，理由在於軌道活動的學習順序考慮到學生前一能力及學習安排，可對次一學習產生支持與效果。第 2 項活動確定學生對乘除的運用時機，可對後續學習速度的活動產出支持作用，且單位換算時需利用乘除，故放在學習路徑的前端有其必要。第 3 及 4 項活動先進行快慢比較，學生以單一條件（距離或時間）比較快慢，之後進行距離與時間兩者比與比值的應用，對學習速度單位有其必要。距離與時間應用比與比值處理單位之間的關係，對判斷速度快慢能發揮作用，例如換成同樣時間為 10 分鐘進行距離比較，或換成同樣為 1 km 長度來比較時間，若能熟悉使用比與比值運算，對快慢的比較有幫助。

圖三：學者建議的速度學習歷程



課程內容設計

經由學習能力分析與 LTs 臆測後，表四展示教學活動的目標及作業內容的設計。這些活動經由同年級教師和學者討論檢視後，進行教學實驗，以考驗實施此 LTs 的成效。

速度 LTs 活動的設計有三項特徵：（1）它總結學生對速度概念發展相關文獻探討所獲結果，掌握學生學習歷程可能產出的學習困難（鄭以仁，2006），故可促進學生順暢學習；（2）學習歷程按照速度教材的特徵配合學生學習經驗進展，合乎學生學習法則（鍾靜等，2001）；（3）明確學習目標與教學流程，臆測學生可能產出的反應，提升教師對教學內容的理解與對學生反應的適時回饋（Clements & Sarama, 2004; Confrey et al., 2009）。

資料蒐集與處理

利用觀察與錄音方式，記錄師生互動的內容，以供事後回溯及省思參考。作者針對學生作答過程及班級討論時特殊的反應加以註記，進一步追蹤訪談對象，驗證任務設計的內容是否符合學生的學習路徑及需求，確認不同能力的學生是否達到預期的學習效果。採用質性分析方式，對（1）課室師生對話、（2）學生解題表現、（3）教師省思、（4）課後訪談記錄加以處理，編碼方式見表五。

研究樣本中，低、中、高分組的學生共 12 人（每層次 4 人），代碼中 Q1-Q6 表示不同的活動，（1）-（8）表示各活動中不同的題目，S01-S12 為訪談學生的編號。教師每項活動結束後皆作省思，檢視自身教學和學生學習表現。為避免研究者主觀偏見，資料分析過程中會與專家、學校同事進行討論，以取得研究結果的一定效度。

研究結果與討論

有關研究結果，茲以（1）學生速度概念的表現，及（2）教師修正速度概念的 LTs 兩部分加以說明。

表四：速度 LTs 任務設計說明

活動名稱	教學目標	作業說明
1. 整數乘除運算	<ul style="list-style-type: none"> 能進行生活中數量、價與量關係的運算。 能進行時間及距離的等分與倍數運算。 	活動中利用乘除運算，解決生活中常用數與量、價與量的關係，並帶入時間及距離的等分及倍數應用。思考與討論並記錄解決問題的過程。最後，將跑步的時間與距離畫出關係圖，以呈現倍數與等分關係。
2. 距離與時間換算	<ul style="list-style-type: none"> 能進行距離 m 與 km 的互換。 能進行不同時間單位的換算。 能進行時間的單名數、複名數、小數或分數的轉換。 	利用奧運競賽項目分類，了解對長度量感的表達，進一步進行長度大小單位的互換，接着處理時間的換算，複名數轉換成不同時間單位的表示，以及判斷時間使用順序。
3. 比和比值的運算	<ul style="list-style-type: none"> 能進行生活中常見數量關係的計算。 複習比與比值中的正比及非正比關係。 能利用比或比值解決問題。 	利用表格及繪製關係圖形，從生活中常見的數量關係複習比與比值中正比與非正比關係。接着將騎車、賽跑的情境帶入距離與時間的關係，討論完成表格，並找出距離與時間的關係。
4. 速度快慢判斷	<ul style="list-style-type: none"> 理解距離或時間單一條件無法確定快或慢。 能利用相同時間與距離判斷快慢。 	以問題情境配合表格呈現，討論快慢的理由，藉由表達的理由引發討論理由的正確性。問題從單一條件，進入到一定時間及一定距離的比較。最後進入距離和時間的綜合比較，以及不同單位的距離時間比較。
5. 速度單位表示	<ul style="list-style-type: none"> 能理解生活中的導出單位。 能理解速度單位的表示（平均速度）。 利用距離與時間算出正確速度。 	利用賣場的廣告引發討論，生活中常見利用兩種單位描述商品，形成導出量。例如：汽水一瓶 2,000 毫升，表示成 2,000 毫升/瓶。接着利用導出單位理解距離與時間產生速度的導出單位，並利用討論了解平均 1 秒和平均 1 m，哪一個成為生活中速度單位的表示。接着利用距離與時間找出秒速、分速、時速。
6. 速度單位換算	<ul style="list-style-type: none"> 能熟練各種速度的換算，並利用速度換算表示距離與時間的關係。 	利用數線將距離與時間同時呈現對應，討論速度可以由秒速轉換成分速和時速，亦可以從時速轉換成分速和秒速。接着利用跑步的秒速和分速判斷快慢，必須進行單位的換算，以及換算的應用。

表五：資料編碼

代碼	說明
T	代表教師對行動的說明
Q1-Q6	代表不同的活動
(1) - (8)	代表各活動中不同的題目
S01-S12	12 位學生的代號

學生速度概念的表現

整數乘除作業表現分析

一、學生學習表現探討

Q1 (1) 在於了解學生對價格、數量比較的想法。高分組學生直接進行推理，中、低分組學生使用 5 斤或換成 1 斤加以判斷。Q1 (2) 在於探討特價與購買數量之間的關係，學生用 $200 \div 5 = 40$ 或 $5 \times 40 = 200$ ，以倍數關係表示。低分組學生對倍數關係無法清楚描述，從訪談資料可知他們對概念表達有困難。例如：

T : S02 你寫的內容跟同組一樣，你寫的倍數關係是甚麼？

S02 : 200 除以 5 斤是 40 元，倍數……

T : S04 你寫倍數關係，上課時你沒有回答出來，你現在可以說說看是甚麼意思？

S04 : ……不知道。

T : 想看看你同組的是怎麼說的？

S04 : 嗯……除以 5 算出 1 斤 40 元。

T : 你把算式寫下來看看，找出有沒有倍數。

S04 : 嗯。

小組討論 Q1 (3) 的答案為 4.11 分鐘或 $4\frac{1}{9}$ 分鐘，其中 S12 計算錯誤(見圖四)。學生多數選擇小數運算，高分組學生能利用分數除法，多數學生習慣使用直式除法以小數呈現結果。

圖四：S12 於 Q1 (3) 的解題表現

大雄在操場慢跑，3 圈花了 12 分 20 秒，平均跑一圈要花多少分鐘？你會怎麼算。

$$12 \text{分 } 20 \text{秒} = 12 \times 60 + 20 = 740 \text{秒}$$

$$740 \div 3 = 246.66$$

$$246.66 \div 60 = 4.11$$

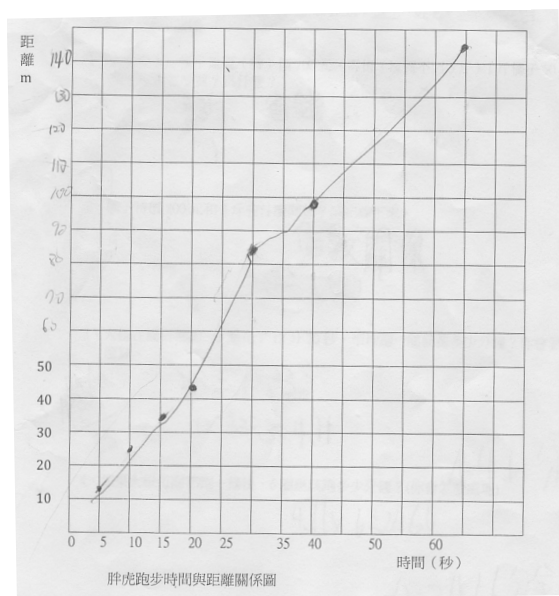
$$4.11 + 2 = 4.33$$

A: 4分01秒

在 Q1 (4) 的情境裏，多數學生以 Q1 (3) 的平均去乘 6，答案為 24.66 分鐘。其中 S12 及 S08 利用相互比較，直接乘 2 倍，得出答案 24 分 40 秒。Q1 (5) 為每秒跑一樣快的條件下，完成跑步記錄表，多數學生使用時間的倍數去算距離，有 3 位使用倍數與等比的概念計算。Q1 (6) 是將 Q1 (5) 的距離與時間繪製成跑步與距離

的關係圖，除 S02 將 35 秒的距離畫錯（圖五），S02 及 S03 徒手畫無法呈現一條直線外，12 人中有 7 人將直線連接到原點 0 秒 0 m，並發現正比關係。

圖五：S02 於 Q1 (6) 的關係圖表現



二、教師省思

教師進行省思回饋，其內容摘錄如下：

(1) 學生討論習慣尚待建立

學生在 Q1 (1)、Q1 (2) 討論時發生分心及偏離主題的表現，透過巡視班級討論及適時提醒，活動進行漸有改善；部分學生對題目 Q1 (3)、Q1 (4) 兩題沒有討論，各自直接作答。進行討論時，兩位寫自己的作業單。教師在教學過程建立良好的討論習慣，應有其必要性，學生透過合作培養良好的數學溝通，對學生的數學思考才有幫助。

(2) 乘除概念連結良好，但低分組有運算錯誤和換算困難

學生對乘除概念能順利與情境連結，少數錯誤情況來自時間換算，或前一題錯誤的延續。低分組學生解題速度明顯較慢，或答題不完整，教師在教學時應留意部分動作較慢學生的反應。

(3) 作業單問題設計應更具討論空間

回顧整個活動發現，在學習單的設計中，Q1 (3)、Q1 (4) 可設計成花多少時間，不要限定作答方向，學生討論出的答案可較多元，且在下一活動的時間單位換算時再出現，可以更聚焦在學生對乘除關係的運用上的表現。

距離與時間換算的表現分析

一、學生學習表現探討

對此任務的活動而言，部分低分組學生作答不完整。能力佳的學生，跳過計算過程直接寫上答案，能快速解決換算問題。在 Q2 (5) 問題中，學生能用每隊平均時間去算出各隊的總時間，S03 和 S05 兩位學生採用換成幾分幾秒的複名數方式表示，當問題沒有明確要求特定時間單位時，學生的作答表現多數傾向以最容易的複名數表示。Q2 (6) 延續前面題目，A、B 兩隊的成績可換成甚麼單位？學生對此題都能將前一題的秒數換算成幾分幾秒的複名數計算，學生皆能回答正確的複名數，內容摘錄如下：

T : 除了算出幾分幾秒，還有沒有其他答案或做法？

S03 : 有。

T : S03 可以怎麼做？

S03 : ……

T : 好，有兩人舉手，S01 你說說看或上台寫下來。

S01 : $800 \div 60$ 計算不要出現餘數，用小數或分數來算 13.33 分鐘或寫成帶分數。

T : 他的做法你們同意嗎？

S03 : 同意。

T : 那化成帶分數是多少，怎麼做？

S11 : 13 又 $20/60$ ，可以寫成 13 又 $1/3$ 分。

T : 對嗎？大家同意嗎？

在 Q2 (7) 問題中，學生將 2 時 15 分換算成分、秒、時，2 位低分組學生只寫出答案，沒寫出計算過程，學生的錯誤在於轉換兩個單位時乘除混淆。由於未明確指出時間單位，學生表現傾向用複名數表達，避開使用小數及分數表示幾分。在 Q2 (8) 問題中，進行三隊趣味競賽時間的比較，有的組依照時間使用由多到少寫出 $A > B > C$ ，有些組依照時間使用由少到多寫出 $C < B < A$ ，有兩組學生計算錯誤，有一組將幾秒換成分數後進行比較，致使 B 與 C 隊的順序排錯。

二、教師的省思

教師省思回饋內容如下：

(1) 時間換算時，對低分組學生應給予留意及協助

中低年級時，學生已學過長度與時間的概念與換算，但學生認知明顯有落差，單位換算的活動能提供中分組及低分組的學生再次複習及熟悉的機會。從低分組學生表現來看，S02 有時間概念不足的情形，S02、S12 有作答不完整情形。高分組出現計算正確但有粗心判斷錯誤的情形。教師巡視學生討論及作答時，應特別留意低分組學生的表現，及時掌握討論及作答過程。例如：在 Q2 (7) 與 Q2 (8)，給予適當協助、概念引導或提問，使學生能進一步解決問題。

(2) 運算能力有落差

高分組學生在單位換算時，小數或分數轉換運算迅速正確；中分組學生運算正確；低分組則計算較緩慢。低分組學生 S02 雖能理解時、分、秒的基本概念，但遇到小數、分數處理複名數換成單名數時，無法自行完成。在巡視學生解題過程中，應即時了解學習的問題，若概念不足、混淆或是運算能力不足，後續可在適當時間給予應有的協助及再學習。Q2 (7) 問題討論與作答時，S08、S12 只參與同組的討論，未自行計算，等待同組的答案。由訪談記錄可看出，低分組學生處理數學問題明顯不夠主動，雖懂得如何算，但練習不足、面對問題不主動加上運算失誤，產生數學表現不佳的情形。在後續活動及教學討論時，應針對此類學生給予必要的提醒，讓學生能動手運算，才不致失去應有的練習機會。

比與比值的表現分析

一、學生學習表現探討

在 Q3 (1) 作答前，教師提示學生先行思考學過的數學概念，請小組討論完成圖表後，檢查發現甚麼？學生能算出 1 罐的價錢，之後依序完成表格，除一組 S11、S12 沒使用比與比值的概念找出罐與元之間的關係外，其他組的學生都能使用比與比值概念，正確寫出罐與元的關係。Q3 (2) 討論存錢問題，計算一定的天數能存到固定的購買金額，學生能正確計算及填表繪圖。Q3 (3) 為時間與距離之間比與比值的問題，學生能用等比及倍數概念作答，但 S02、S12 無法清楚描述表格中距離與時間的關係。由於學生剛學過比與比值及正比兩單元，教材出現過高鐵行駛的距離與時間關係，學生對比與比值概念記憶猶新，因此解題表現正確率高，但低分組學生 S02 無法說明正確理由，有 3 位中、低分組學生在 Q3 (5) 作答過程不完整。中分組學生 S11 作答正確，但在 Q3 (4) 描述 km 數的倍數關係及時間之間的倍數關係時誤用，如圖六所示。

圖六：S11 於 Q3 (4) 的解題表現

4、馬拉松選手小夫平時練習，要求自己保持相同的快慢(速度)，請從下表提供的訊息思考，並在空白的表格處填入適當的答案。

公里	5	10	15	20	25
小時	1/2	1	1 1/2	2	2 1/2

從表格中你看到什麼？

正比

Q3 (5) 問題為在保持相同的快慢下，跑 1 km 需要多少時間？學生有用等比方式計算，例如 S03；有用 1 小時除以 10 km 的方式求出答案，例如 S12；亦有用表格中的 $\frac{1}{2}$ 小時除以 5 km，答案 $\frac{1}{10}$ 小時，例如 S07。高分組學生 S05 用 30 分鐘除以 5 km，以分鐘作答。Q3 (5) 請學生依 Q3 (4) 的表格算出 1 km 要花多少時間？多數記錄答案為 $\frac{1}{10}$ 小時，一位將 $\frac{1}{2}$ 小時換成 30 分鐘除以 5，以 6 分鐘作答。學生的作答表現如圖七。

圖七：學生於 Q3 (5) 的解題表現

$\frac{1}{2}$ 時 = 30 分鐘

$30 \div 5 = 6$

A: 6 分鐘

S05 的解題表現

$\frac{1}{2} = t$

$= \frac{1}{2} \times \frac{1}{5}$

$= \frac{1}{10}$

$\square = \frac{1}{10}$

A: $\frac{1}{10}$ 小時

S07 的解題表現

$1 \div 10 = \frac{1}{10}$

A: $\frac{1}{10}$ 小時

S12 的解題表現

$1 : \square = 10 : 1$

$\square = 1 \times \frac{1}{10}$

$\square = \frac{1}{10}$ 小時

S03 的解題表現

二、教師省思

教師省思回饋的內容如下：

(1) 學生能應用比與比值解決問題

比與比值在六年級先前單元已學過，但對距離與時間並沒有進一步的探討，經過教學活動後，高分組學生可以很快處理問題；中分組學生也能運用適當的方法解決問題；低分組學生透過小組討論已知如何算，計算也正確，但從訪談中可看出，低分組學生只能說出怎麼算，無法進一步說明表格中距離與時間的關係，例如 S02 的表現。

(2) 低分組討論能力較弱

巡視小組討論過程發現，部分認知能力較高、自信心不足的學生或能力不佳的低分組學生，無法有效表達討論的內容，小組討論的效果不佳，以 A 組最為明顯，F 組在 Q3 (3)、Q3 (4) 也有此情形，可以針對此類型的學生協助參與該組討論。

(3) 作答的完整性

活動進行前，已提醒學生盡量記錄算法及理由，S06、S11、S02 在 Q3 (5) 沒有清楚記錄算式及理由。兩位中分組學生在訪談中能表達作法，學生雖然概念懂，但成績表現不佳，來自於平時作答不完整，或憑判斷而不動手算，作答時草率。針對此類型的學生應適度要求作答習慣，培養自我檢視作答過程，降低因粗心造成的失誤。多鼓勵學生表達，動筆記錄作法。除此之外，也應注意小組中是否思考緩慢、來不及計算，及沒有計算等情形，才能在後續的討論和訪談中，更清楚學生思考作答過程遭遇到哪一種困難。

快慢比較的表现分析

一、學生的學習表現探討

開始討論 Q4 (1) 時，部分小組偏離主題，從卡通人物的特性及卡通中有甚麼道具去找理由，教師巡視討論過程，要求學生依照給的問題討論，學生才漸漸回到問題上。Q4 (1) 題目只給跑步圈數的條件，有些認為圈數多較快，亦有認為不一定。研究對象中有 3 位寫「大雄」，1 位寫「多拉^へ夢」（香港譯作「多啦 A 夢」）。寫「大雄」的學生未考慮時間，答案正確的學生表示不一定，因為沒有時間、出發地不一樣、距離不明確等因素造成無法判斷。Q4 (2) 只給時間，沒提供騎車的距離，經討論後，有 3 位寫「胖虎」速度比較快，這些學生只考慮時間花得少比較快，沒考慮騎車的距離。在同儕的對話中，S03 加入距離條件，能說出「胖虎」為何會比較慢的原因。

Q4 (3) 給予固定時間，判斷不同的兩距離誰速度快？學生能將 km 換成 m，用相同單位進行比較，作答正確。學生能由 Q4 (1) 知道，時間相同時，長度較長比較快。Q4 (4) 給予固定的距離，判斷在不同單位的時間誰速度快。學生能將時間換成相同單位比較，知道相同距離之下時間少比較快，或是同時出發會比較快到。Q4 (5) 賽跑問題，提供的距離與時間單位相同，要學生判斷誰快？學生皆答 C 最快，但未涉及 A、B 兩者的速度比較，有 2 位進一步處理 A 與 B 的判斷，一位正確算出 A 與 B 速度相同；另 S12 寫 $A < B$ 判斷錯誤，有 2 位學生利用距離除以時間換成 1 秒跑的距離進行比較，已具有速度導出單位的概念，如圖八。

圖八：S11 於 Q4 (5) 的解題表現

	A	B	C
公尺	100	90	100
秒	20	18	18

$$100 \div 20 = 5$$

$$90 \div 18 = 5$$

C 小 B

$$5 \frac{5}{9} > 5$$

對於 Q4 (5) 的表現，多數學生看到 A、C 是 100m，B、C 同樣是 18 秒，可分兩段去判斷快慢，找出 C 比 A 快及 C 比 B 快，學生以此方法判斷 C 最快，如圖九的解題表現。另有 2 位學生以 m 除以秒的比值概念計算，換成 1 秒跑多少 m 去判斷快慢，已有速度導出量的概念，如圖九的解題表現。有 4 位學生發現 A、B 是一樣快。另 S12 記錄 C 快，理由是 $C < A < B$ ，課後訪談，S12 表示快慢順序是 C、A、B，「<」符號混淆兩概念，時間少較快及距離長較快。

圖九：學生於 Q4 (5) 的解題表現

5、下表是三人賽跑的記錄如下，三人誰最快？為什麼？

	A	B	C
公尺	100	90	100
秒	20	18	18

A < C B < C
A < C

S06 的解題表現

5、下表是三人賽跑的記錄如下，三人誰最快？為什麼？ C, 因為他 100 公尺

	A	B	C
公尺	100	90	100
秒	20	18	18

A < C 100 ÷ 20 = 5 只跑十八秒
B < C 90 ÷ 18 = 5) 1 秒

S08 的解題表現

以下為 S12 課後訪談內容：

T : Q4 (5) 你寫 C 比較快，理由寫 $C < A < B$ ，表示甚麼？

S12 : ……C、A、B 的順序。

- T : 你怎麼比較出來的？
- S12 : C 的時間用得比 A 少。
- T : 還有呢？再說看看。
- S12 : C 比 B 距離遠。
- T : 那「<」是時間，還是距離。
- S12 : ……
- T : 那 A 比 B 快，你寫 $A < B$ 指甚麼。
- S12 : ……

在 Q4 (6) 動物的跑步記錄，要學生判斷距離與時間兩種單位，學生能正確寫出野兔最快。多數學生將 3 種動物的順序排出，其中 S05 答案及排列順序雖然正確，但寫成野兔 < 駝鳥 < 非洲象，作答記錄中以時間少來判斷快慢，如圖十。有兩位用距離除時間找到比值去判斷，多數使用分段比較，野兔與駝鳥比（同時間比距離長），以及非洲象與駝鳥比（換成同距離比時間少）後，再判斷快慢。

圖十：S05 於 Q4 (6) 的解題表現

6、下表是三種動物跑步的記錄，三種動物誰最快？寫下你的做法。

	野兔	非洲象	駝鳥
距離	4.8km	6000m	3000m
時間	240 秒 4分	9 分	240 秒 4分

$4.8\text{km} = 4800\text{m}$
 $3000 \times 2 = 6000$
 $4\text{分} \times 2 = 8\text{分}$
 野兔 4分, 4800m
 非洲象 < 9分, 6000m
 駝鳥, 8分, 6000m
 野兔 < 駝鳥 < 非洲象

野兔

二、教師省思

教師省思回饋的內容如下：

(1) 學生在說明快與慢，舉例能力較弱

學生在此活動中，多數能發現比較快慢時需要提供距離與時間，低分組和中分組學生在一開始的兩個問題仍有錯誤思考。引導學生表達其他想法或做法時，學生只討論出跑的圈數多，可能比較慢，試着請學生說出其他想法，S09 只能舉出跑五圈，可以慢慢跑，三圈可以跑很快，沒有設想一個明確時間來表示。學生雖能知道時間固定才能確定快慢，但無法自行代入實際時間，說出可能快、慢、兩個一樣快。

(2) 高分組及中分組學生已能運用距離除以時間的速度導出量概念

從學生的作業單及課堂發表情形發現，學生在距離與時間兩條件的比較快慢上，多數會以比較來判斷，無法比較時才換成相同時間比距離、換成相同距離比時間。S11、S10 使用距離與時間的比值判斷，可能已學會平均速度的運算。

(3) 表格呈現問題有助學生判斷題意

比較快慢使用表格來呈現條件，沒有出現誤用數字或單位的粗心情形，顯示學生透過表格理解題意，比較清楚。

速度單位表示的表現分析

一、學生學習表現探討

Q5 (1) 問題是透過賣場的特價廣告單舉例，要學生討論生活中有哪些導出單位。教師巡視各組討論，有 3 組學生舉手詢問該怎麼想，教師給予提示，着學生從買東西或一個物品會怎麼標示去連結經驗。多數寫下單位數量（個、枝、斤、箱……）多少錢，能延伸舉例「元」以外的導出單位較少，4 位學生能舉出單位數量（罐、包）多少 ml、kg，S11 特別舉出光速一秒跑 30 萬 km。Q5 (2) 討論跑步、騎車、搭火車會用哪些單位描述快慢，學生多數能表示使用距離和時間表示速度，直接用距離 ÷ 時間 = 速度。Q5 (3) 要學生計算運動選手一秒跑多遠，及 1 m 花多少時間，學生皆計算正確，如圖十一。請學生試着說看看一秒的距離誰快，及 1 m 花的秒數誰快，學生能回答正確。詢問學生「用 1 秒移動的距離」和「1 m 花多少時間」哪一種表示速度會比較好，多數學生選擇「1 秒移動的距離」。有 3 位學生選「1 m 花多少時間」，學生選「1 m 花多少時間」的理由是時間愈少的愈快到達終點。

圖十一：學生於 Q5 (3) 的解題表現

Handwritten student work for S02 showing calculations for speed and time:

$$200 \div 50 = \frac{200}{50} = 4 \text{ m (1秒)}$$

$$50 \div 200 = \frac{1}{4} \text{ 秒 (1公尺)}$$

A: ① 4m ② $\frac{1}{4}$ 秒

S02 的解題表現

Handwritten student work for S09 showing calculations for speed and time:

$$200 \div 50 = 4$$

$$50 \div 200 = 0.25$$

A: 4m/秒, 0.25 秒

S09 的解題表現

學生已知合併距離與時間兩單位的導出量表示，在 Q5 (4) 作答時多數能將平均的秒速、分速、時速，運用導出單位記錄，作答正確，如圖十二。S02 沒有運算過程，另 S08 只有過程，沒有記錄答案及單位。

圖十二：學生於 Q5 (4) 的解題表現

$252 \div 3 = 84 \text{ km/hr}$
 $150 \div 30 = 5 \text{ m/s}$
 $1500 \text{ m} \div 50 \text{ 分} = 30 \text{ m/分}$
 $1.5 \text{ km} \div 50 \text{ 分} = 0.03 \text{ km/分}$

S11 的解題表現

平均每小時速度多少?
 ① $150 \div 30 = 5$
 $A: 5 \text{ m/s}$
 ② $1.5 \text{ km} = 1500 \text{ m}$
 $1500 \div 50 = 30$
 $A: 30 \text{ m/s}$
 ③ $252 \div 3 = 84$
 $A: 84 \text{ km/hr}$

S10 的解題表現

訪談學生的作答表現，摘要如下：

T : Q5 (3) 一分鐘跑多遠和 1 m 花多少時間這題你怎麼算的？

S04 : 200 除以 50，算出一分鐘跑 4 m。

T : 那 1 m 花多少時間呢？

S04 : 就相反。

T : 你指甚麼呢？

S04 : 這兩個相反。(指着 200 和 50)

T : 火車的平平均時速你怎麼算出來呢？

S04 : 253 除以 3。

T : Q5 (4) 的秒速怎麼算來的？

S06 : 嗯……用 150 除以 30 算出距離除以時間。

T : 那你知知道秒速，距離除以時間的速度，說說為甚麼這樣做？

S06 : 嗯……老師你指的是甚麼？30 秒換成 1 秒。

T : 你算出的秒速表示甚麼意思？

S06 : 30 秒跑 150 m，換成 1 秒 5 m。

S10 : ……150 乘……不對是除 30，1.5 除以 50 或換成 1,500 除以 50。

T : 你怎麼寫了兩個 1.5 km 和 1,500 m？

S10 : 用 1,500 會比較好除，後來用 1.5 km 也算了一次。

T : 說說看兩個有甚麼差別。

S10 : 單位不一樣。

二、教師省思

教師省思回饋內容如下：

(1) 學生觀察力及思考能力不足

Q5 (2) 討論時，學生無法就題目跑步、騎車、搭火車三種移動物體應該使用甚麼時間和距離單位來描述，只列出距離有 km、m，時間有時、分、秒。

(2) 作業單 Q5 (3) 應加以調整

Q5 (3) 的問題可增加「哪一個描述速度比較好？」提問方式。另外，可改成兩位選手參加兩種賽跑的成績，使用表格呈現，分成 2 子題，讓學生用不同方式記錄速度的描述，從對照、同一時間比距離、距離長短和速度快慢數值直接判斷。

(3) 低分組學生討論會依從高分組的意見

從學生的反應中發現，高分組的學生容易從討論中了解「1 秒跑多遠」、「1 m 花幾秒」哪一個描述速度比較好；中分組的學生討論後，能判斷時間一樣，距離較長速度較快；低分組的學生多數無法表達理由，依從高分組的理由，無法自行表示意見。經過進一步說明，解釋速度的意義及表示方式後，學生在後續的秒速、分速、時速能正確運算，部分中分組及低分組學生有利用公式解決，而非從速度代表的平均每秒、平均每分鐘的概念去思考解決問題。

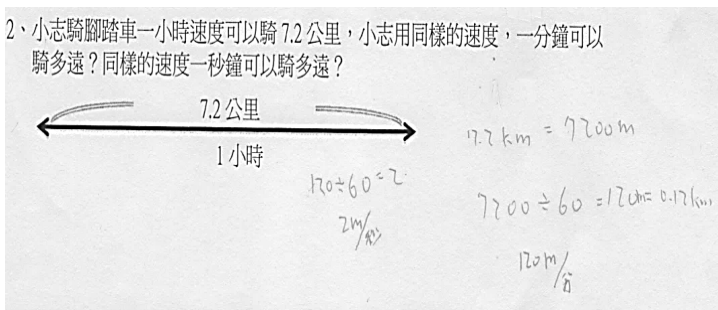
速度單位換算的表現分析

一、學生作答表現探討

學生將 Q6 (1) 的問題每秒行駛 70 m，乘以 60 倍的方式算出分速的值，再乘以 60 倍找出時速。學生多數以速度單位「m/分」作答，亦有使用「km/分」，換成

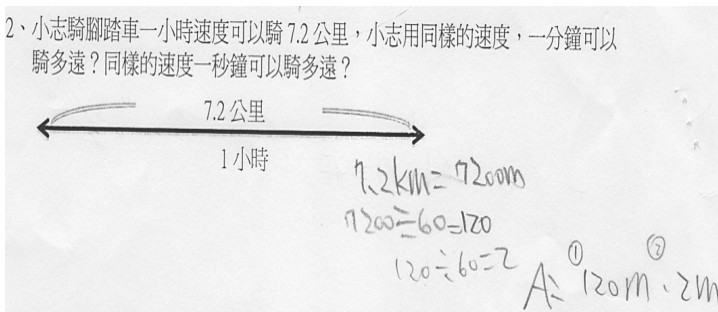
圖十三：學生於 Q6 (2) 的解題表現

2、小志騎腳踏車一小時速度可以騎 7.2 公里，小志用同樣的速度，一分鐘可以騎多遠？同樣的速度一秒鐘可以騎多遠？



S08 的解題表現

2、小志騎腳踏車一小時速度可以騎 7.2 公里，小志用同樣的速度，一分鐘可以騎多遠？同樣的速度一秒鐘可以騎多遠？



S06 的解題表現

「km/時」。少數學生直接將 4,200 m 乘以 60，以 m 作答。Q6 (2) 提供時速的條件，請學生換算成分速和秒速的方式，學生能將 7.2 km 的距離換成 m，再將 1 小時的距離平分 60 等分，換成分速，接着再除以 60 換算成秒速，學生作答均正確，如圖十三。學生多數用速度單位「m/分、m/秒」作答，少數學生直接以 m 回答。

Q6 (3) 請學生判斷兩個不同速度單位的快慢（距離使用 m 但時間為秒和分），學生皆能選出正確答案。5 位學生利用秒速方式乘以 60，換算成分速進行比較；5 位學生利用分速除以 60 的方式，換成秒速進行比較，特別是 S10、S03 換算成秒速進行比較，旁邊再換成分速比較一次，顯見已有部分學生對換算概念熟練，如圖十四。

圖十四：學生於 Q6 (3) 的解題表現

3、小名和小志兩人在操場上慢跑，小名平均每秒鐘(秒速)跑 1.5 公尺，小志平均每分鐘(分速)跑 96 公尺，誰跑得比較快？你會怎麼做？

$$1.5 \times 60 = 90$$

$$90 < 96$$

A: 小志

S01 的解題表現

3、小名和小志兩人在操場上慢跑，小名平均每秒鐘(秒速)跑 1.5 公尺，小志平均每分鐘(分速)跑 96 公尺，誰跑得比較快？你會怎麼做？

$$96 \div 60 = 1.6$$

$$1.5 \times 60 = 90 \text{ m}$$

A: 小志

S03 的解題表現

3、小名和小志兩人在操場上慢跑，小名平均每秒鐘(秒速)跑 1.5 公尺，小志平均每分鐘(分速)跑 96 公尺，誰跑得比較快？你會怎麼做？

$$96 \div 60 = 1.6$$

$$1.6 > 1.5$$

A: 小志快

S11 的解題表現

Q6 (4) 提供兩個速度單位，請學生判斷誰會先抵達終點。學生能正確寫出乙選手先到達。多數學生將乙選手的速度單位換成與甲選手相同的單位 (m/分) 進行，如圖十五；其中有 4 位學生將甲選手的速度單位換成與乙選手相同的單位 (km/時) 進行比較，如圖十六。Q6 (5) 希望學生依問題情境透過換算作答，學生皆能正確寫出 1 分鐘及 5 分鐘後兩車的距離，S01、S12 以速度單位而非 m 表示，第 2 個小問題亦有類似情形，5 分鐘後相距幾 m，學生以速度單位作答。

圖十五：S12 於 Q6 (4) 的解題表現

4、賽車選手兩人的速度如下表，兩人同時出發，誰會先到達終點？你會怎麼做？

甲選手	4800 公尺/分
乙選手	300 公里/時

$300 \text{ km} = \frac{5 \text{ m}}{\text{分}} = 5000 \text{ m/分}$ $300 \div 60 = 5$
 $5 \times 1000 = 5000 \text{ m/分}$
 $5000 \text{ m/分} > 4800 \text{ m/分}$ A: 乙

S12 的解題表現

圖十六：S06 於 Q6 (4) 的解題表現

甲選手	4800 公尺/分
乙選手	300 公里/時

$4800 \text{ m} = 4.8 \text{ km}$
 $4.8 \times 60 = 288$
 $300 > 288$
 A: 乙選手

二、教師省思

教師省思回饋的內容如下：

(1) 發表作答結果時，教師應適當引導學生發言

學生發表作答結果時，有兩種明顯的現象，有學生搶着回答，也有學生不主動舉手發表。教師可以在巡視小組討論時，挑選特別不同作答方式的小組，適時的指定特定小組發表作法或想法，以便於能促進不同數學思考的討論。學生在發表作法時，說明較簡略，多只表達如何算，需進一步引導才能將為甚麼這樣算表達出來。另外，小組

表達作法後，學生對贊同他組的答案較被動，只有在表達自己有不同答案時，會主動舉手。可以在上課前給予適當的提醒，或給予小組適度的獎勵，以鼓勵正向行為表現。

(2) 作業單問題安排利用表格及數線，對學生有幫助

作業單的內容，將速度的時間與距離用數線的方式表達，對部分學生能提供幫助。在不同單位的速度表示時，採用表格呈現，比起一般純文字敘述，學生在對照上比較容易，沒出現抄錯數字，或者單位看錯的現象。

(3) 換算單位使用上，學生仍有混淆

S01 單位誤用，S12 對平均速度單位產生混淆。可看到學生對於速度的平均概念，特別是單位的使用仍不熟練，低分組學生在 Q6 (5) 题目的描述，換方式便無法產生類化，教師布題之後，可了解低分組學生討論及解決問題的過程，視個別情況補充說明題意。

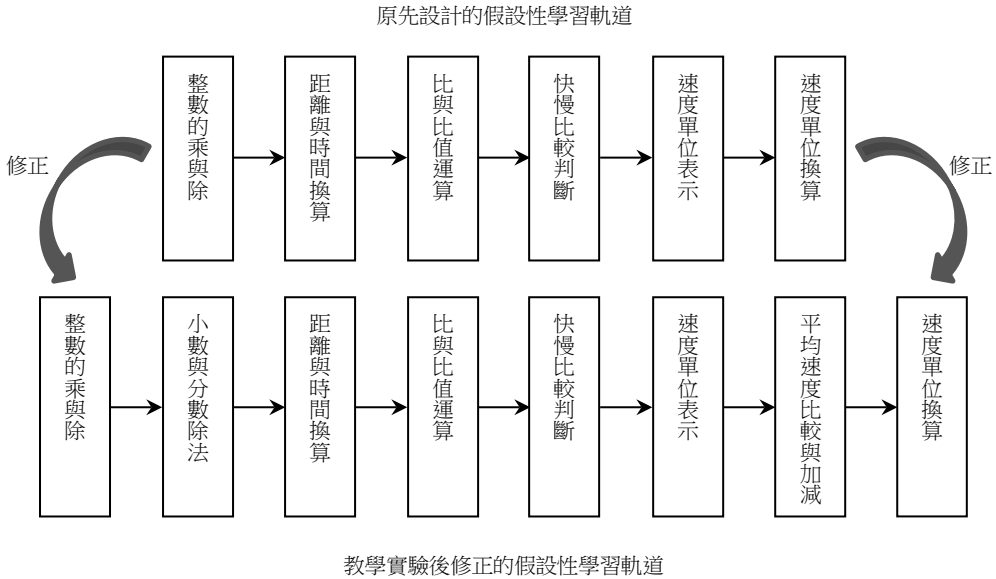
教師修正速度概念的 LTs

本研究利用 LTs 理論設計速度活動進行教學實驗，教師對不同程度學生的數學思考給予合宜說明，促使學生的數學討論與進步表現。根據教師的省思與說明，發現在兩個部分影響到教學目標的達成：一是學生學習動機意願和學習數學的態度，另一則是軌道活動設計的精緻化是否能協助學生在數學概念上無縫接軌。這兩項因素影響了教師對 LTs 的修正。根據教師對整個教學歷程的回溯省思，從第 1 項活動開始，小組討論多次出現相互干擾及離題等現象，經教師幾次巡視提醒，使此類行為減低，但部分學生因作答習慣不佳，未提醒則再次出現干擾。由於學生習慣找出正確答案，思考範圍限縮，對他人答案甚少提出質疑，加上生活經驗不足，就速度問題要做進一步思考、溝通、辯證，尚有努力的空間。透過教師對速度概念由淺到深路徑的安排，由作業單及訪談可看出學生對速度概念的理解有進步。

在速度概念的銜接上，部分學生對時間換算運用小數或分數除法仍有困難，另外在平均速度單位運用及轉換有誤用情況。教師認為 LTs 的設計，可再添加 2 項活動，以幫助學生時間單位的轉換或運算，使平均速度的應用能順利進行。其一加入小數或分數除法的軌道活動，可使學生同時對時間的等分或單位換算及後續平均速度的計算有幫助；其二在速度單位表示的活動後，添加「利用平均速度概念進行加減和比較」，使學生透過較真實的情境連結數學概念，幫助進行較複雜的速度單位換算。修正後的 LTs 見圖十七。

圖十七顯示出調整後新的 LTs，修正的部分有二：一是在原先第 1 及 2 項活動之間添加「小數與分數除法」，目的在檢測及了解學生先備知識是否充足。小數與分數除法雖在速度單元前已學過，但低成就學生仍有錯誤產出，尤其是計算錯誤、分數

圖十七：教學實驗後修正之 LTs



乘除法的混淆、小數分數轉換有關的除法問題。時間的換算雖不需使用小數除小數、分數除分數、分數除小數等複雜概念，但之後在比與比值或平均速度方面仍有機會應用，因此可補足原有軌道的不足。

另一修正則是在「速度單位表示」及「速度單位換算」之間增添「平均速度比較與加減」活動。由於少部分學生在平均速度概念與生活連結出現一些問題，修正後的 LTs 能令學生順利跨越進入下一個學習階段，對中或低分組學生而言可在未來的教學中試行。

結論與建議

歸納研究發現，可形成以下結論：

1. 學生對速度概念學習表現的情形是，高分組學生在乘除作業的判斷時機及計算、速度的距離與時間換算作業、運用速度的比與比值作業解決相同速度問題、快慢判斷的速度作業、同時考慮距離與時間兩因素的關係、利用平均速度運算出速度單位等均表現良好；低分組學生在除法應用於小數及分數上、轉換單名數、描述兩單位之間的關係、解題過程表達、單位轉換等方面仍有困難。
2. 經由教學實驗後，教師調整獲得「整數的乘與除」→「小數與分數除法」→「距離與時間換算」→「比與比值運算」→「快慢比較判斷」→「速度單位表示」→

「平均速度比較與加減」→「速度單位換算」LTs 模式，為學生提供速度概念和解題能力的教學運用。

本研究結果除支持 LTs 應用於數學特殊議題（例如速度概念教材）的設計與教學實驗，獲得良好成效並豐富文獻資料外，透過教學順序的安排，能協助教師深入理解學生速度概念發展的情形，掌握教材與學生認知特性，提供學生合宜的學習機會，促進數學學習動機並提升數學成就表現；而最重要的是師生互動歷程中，教師從 LTs 中臆測學生的思考、理解學生想法，並從形成性評量中給予學生不同的回饋反應，協助學生達成學習目標。另外，教師從自身的回溯省思了解到教學相長的啟示，不僅對教學技巧、學科內容知識或是課程設計方面有專業發展，LTs 亦提供了最佳的導引和機制，有利於教師結合理論和實務，解決課室實際問題。根據發現，本文提出下列建議，以作日後國小教師在數學速度教學及應用 LTs 研究的參考：

1. 擴展速度 LTs 研究的範圍，使 LTs 理論能有進一步的推論與應用——教師就速度的教學實驗僅針對一班級進行，未來可擴充實驗班級，透過不同教師的協同教學，或擴大研究範圍取得更多資料，獲得更多 LTs 的研究成果，設計安排適合的學習活動，協助理解與發展學生的數學概念。
2. 掌握速度各重要能力的學習，以利教師班級教學——速度學習的歷程若缺少某些能力，對下個進階概念的學習有重要影響，這對學習能力低弱的學生最為明顯。低分組學生在時間換算成單名數分數、速度單位轉換上易混淆，對速度單位的概念不熟悉；教師如能事先有效診斷，將學生缺少的概念或能力適時補足，可避免在新概念學習時的困難。
3. 重視課室討論及觀念澄清的過程，使學生能彼此辯證，達到鷹架作用——學生的思考、推理需要搭配適當的討論與表達，討論與辯證花費時間雖然較為冗長，但對概念的澄清與提升很重要。學生雖然在討論辯證上尚未成熟，但經過討論溝通，對速度概念及速度運算會有進步。教師應做好備課與布題工作，清楚引導學生的思考方向並適當鼓勵，使學生在溝通中熟悉概念。

參考文獻

- 教育部（2008）。《國民中小學九年一貫課程綱要數學學習領域》。台北，台灣：教育部。
- 陳嘉皇（2005）。〈「學習軌道」理論之意涵與其在兒童圖形與面積概念發展上之探究與應用〉。《教育科學期刊》，第 5 卷第 2 期，頁 1-26。
- 陳嘉皇（2015）。〈國小教師對周長與面積單元課程資源運用之研究〉。《當代教育研究季刊》，第 23 卷第 3 期，頁 39-79。doi: 10.6151/CERQ.2015.2303.02

- 鄭以仁（2006）。《國小六年級學生對速度概念的學習表現與補救教學之研究》（未出版碩士論文）。國立台南大學，台南，台灣。
- 蕭志芳（2003）。《中高年級國小學童時間概念之探究》（未出版碩士論文）。國立台北師範學院，台北，台灣。
- 鍾靜（1998）。〈時間教材和速度教材的設計〉。載台灣省國民學校教師研習會（編），《國民小學數學科新課程概說（高年級）：協助兒童認知發展的數學課程》（頁 230–256）。台北，台灣：台灣省國民學校教師研習會。
- 鍾靜、盧炳寰、林素微（2001）。《國小數學教材分析——時間與速率》。台北，台灣：教育部。
- Ball, D. L., Thames, M. H., & Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching: What makes it special? *Journal of Teacher Education*, 59(5), 389–407. doi: 10.1177/0022487108324554
- Clements, D. H., & Sarama, J. (2004). Learning trajectories in mathematics education. *Mathematical Thinking and Learning*, 6(2), 81–89. doi: 10.1207/s15327833mtl0602_1
- Confrey, J., Maloney, A., Nguyen, K., Mojica, G., & Myers, M. (2009). Equipartitioning/splitting as a foundation of rational number reasoning using LTs. In M. Tzekaki, M. Kaldrimidou, & H. Sakonidis (Eds.), *Proceedings of the 33rd conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 345–352). Thessaloniki, Greece: International Group for the Psychology of Mathematics Education.
- Corcoran, T., Mosher, F. A., & Rogat, A. (2009). *Learning progressions in science: An evidence-based approach to reform*. Philadelphia, PA: Consortium for Policy Research in Education.
- Daro, P., Mosher, F. A., & Corcoran, T. (2011). *Learning trajectories in mathematics: A foundation for standards, curriculum, assessment, and instruction*. Philadelphia, PA: Consortium for Policy Research in Education.
- Gravemeijer, K. (2004). Local instruction theories as a means of support for teachers in reform mathematics education. *Mathematical Thinking and Learning*, 6(2), 105–128. doi: 10.1207/s15327833mtl0602_3
- Piaget, J. (1969). *The child's conception of time*. London, England: Routledge.
- Schwartz, J. (1988). Intensive quantity and referent transforming arithmetic operations. In J. Hiebert & M. Behr (Eds.), *Number concepts and operations in the middle grades* (pp. 41–52). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum; Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.
- Tournaire, F., & Pulos, S. (1985). Proportional reasoning: A review of the literature. *Educational Studies in Mathematics*, 16(2), 181–204. doi: 10.1007/BF02400937

Teaching the Concepts of Speed Using Task Design and Experiment

Chia-Huang CHEN

Abstract

This article aims to report a teaching experiment by an in-service teacher, using the principles of learning trajectories (LTs), with tasks regarding the concepts of speed and to examine the performance of students with regard to speed concepts. With the retrospective reflections made by the teacher after the teaching experiment, the instantiated teaching theories produced was discussed. The subjects of this study comprised a class of sixth-grade students at a public elementary school in Central Taiwan and their homeroom teacher. Teacher-student interactions were recorded; qualitative analyses were used to investigate teacher-student dialogue, the problem-solving performance of the students, teacher reflections, and after-class interviews with the students. Results show that: (a) after the LT-based course and teaching experiment, the students performed well in determining and calculating multiplication and division operations, converting distances and time, comparing speeds, and using average speed units. Students in the low-performing group still needed to improve on division with decimals and fractions, the conversion of fractions in simple denominate numbers, the description of relationships between two units, unit conversion, and the presentation of the problem-solving process. (b) The effect of the instantiated teaching model could be obtained after the teaching experiment of teaching students the concepts of speed and problem-solving strategies. Suggestions were then formulated for future teaching reference and research.

Keywords: speed; teaching; professional development; learning trajectories