C. R. Acad. Sci. Paris, t. 327, Série I, p. 629-632, 1998
Analyse mathématique/*Mathematical Analysis*
(Systèmes dynamiques/*Dynamical Systems*)

Analyse multifractale de la récurrence sur l'espace symbolique

Ai Hua FAN [a], De Jun FENG [b]

[a] Département de mathématiques, Université de Picardie Jules-Verne, 33, rue Saint-Leu, 80039 Amiens, France
et Analyse harmonique, mathématiques, Université de Paris-Sud, 91405 Orsay, France
Courriel : Ai-Hua.Fan@mathinfo.u-picardie.fr

[b] Department of Applied Mathematics, Tsinghua University, Beijing, 100084, P.R. China
and Center for Advanced Study, Tsinghua University, Beijing, P.R. China
Courriel : dfeng@math.tsinghua.edu.cn

(Reçu le 12 juillet 1998, accepté le 21 juillet 1998)

Résumé. Soit (X, T) un système dynamique. La récurrence d'un point x relative à une fonction $\Phi : X \to \mathbf{R}^d$ est décrite par la limite des moyennes ergodiques $n^{-1} \sum_{j=0}^{n-1} \Phi(T^j x)$. Nous nous intéressons à mesurer la taille de l'ensemble des points avec une récurrence prescrite. Les dimensions de tels ensembles sont calculées dans le cas de système symbolique. © Académie des Sciences/Elsevier, Paris

Multifractal analysis of the recurrence on a symbolic space

Abstract. Let (X, T) *be a dynamical system. The recurrence of a point* x *related to a function* $\Phi : X \to \mathbf{R}^d$ *is described by the limit of ergodic means* $n^{-1} \sum_{j=0}^{n-1} \Phi(T^j x)$. *We are interested in estimating the size of the set of points with a prescribed recurrence. The dimensions of such sets are computed in the case of symbolic spaces.* © Académie des Sciences/Elsevier, Paris

1. Problème

Voici notre problème. Soient $T : X \to X$ un système dynamique et $\Phi : X \to \mathbf{R}^d$ une application. Considérons la limite suivante, si elle existe :

$$\sigma_\Phi(x) = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \Phi(T^j x)$$

que l'on appelle la *récurrence de* x *relative à* Φ. Quel est l'ensemble L_Φ des limites possibles ? Pour $\alpha \in L_\Phi$, quelle est la taille (décrite par la dimension de Hausdorff, par exemple) de l'ensemble

$$E_\Phi(\alpha) = \{x \in X : \sigma_\Phi(x) = \alpha\} ?$$

Note présentée par Jean-Pierre KAHANE.

Prenons $\Phi = (1_{A_1}, \ldots, 1_{A_d})$ où 1_A désigne l'indicatrice d'un ensemble A. Alors les composantes du vecteur $\sigma_\Phi(x)$ sont les temps de retour respectifs de x dans les ensembles $A_1, \ldots, A_d$.

À notre connaissance, ce problème général a été peu traité. Seules ont été examinées certaines situations particulières ([1], [8], [2], [3], [4]). Le problème peut être qualifié de multifractal. Mais il est de nature un peu différente de ce que l'on entend souvent par multifractal, à savoir l'analyse multifractale de mesures. De telles analyses sur les mesures sont au contraire abondantes. Nous ne citons que quelques références classiques (*voir* [12], [7], [5], [6]). Une autre sorte d'analyse multifractale portant sur les fonctions se trouve dans [11].

Dans cette Note, nous présentons quelques résultats obtenus dans le cas de système symbolique. C'est un premier pas dans cette direction de recherche.

2. Notations

Soit $X = \{0,1\}^N$ muni de l'ultramétrique usuelle et soit T le décalage (à gauche) sur X. Le n-cylindre $I(\varepsilon_1, \ldots \varepsilon_n)$ est l'ensemble des points $x = (x_j) \in X$ tels que $x_j = \varepsilon_j$ $(1 \leq j \leq n)$. Les dimensions de Hausdorff et de Packing d'un ensemble $A \subset X$ seront notées respectivement $\dim_H A$ et $\dim_P A$.

Pour $\alpha \in \mathbf{R}^d$, $n \geq 1$ et $\varepsilon > 0$, désignons par $f(\alpha, n, \varepsilon)$ le nombre de n-cylindres contenant au moins un point x tel que

$$\left| \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \Phi(T^j x) - \alpha \right| < \varepsilon.$$

Définissons alors la fonction $\Lambda_\Phi : L_\Phi \to [0,1]$ par :

$$\Lambda_\Phi(\alpha) = \lim_{\varepsilon \to 0} \liminf_{n \to \infty} \frac{\log f(\alpha, n, \varepsilon)}{\log 2^n}.$$

Soit Δ_k l'ensemble des probabilités p définies sur $\{0,1\}^k$ telles que

$$p(x_1, \ldots, x_{k-1}, 0) + p(x_1, \ldots, x_{k-1}, 1) = p(0, x_1, \ldots, x_{k-1}) + p(1, x_1, \ldots, x_{k-1}).$$

Définissons l'entropie d'une telle mesure p par

$$H(p) = -\sum_{x_1, \ldots, x_k} p(x_1, \ldots, x_k) \log_2 \frac{p(x_1, \ldots, x_k)}{p(x_1, \ldots, x_{k-1}, 0) + p(x_1, \ldots, x_{k-1}, 1)},$$

où $\log_2 x = \frac{\log x}{\log 2}$. Définissons aussi l'application $\varphi : \Delta_k \to \mathbf{R}^d$ par :

$$\varphi(p) = \sum_{x_1, \ldots, x_k} p(x_1, \ldots, x_k) \Phi(x_1, \ldots, x_k).$$

3. Résultats

THÉORÈME 1. – *Supposons que $\Phi : \{0,1\}^N \to \mathbf{R}^d$ est une application continue. Alors :*
(1) *L_Φ est un compact convexe non vide ;*
(2) *pour tout $\alpha \in L_\Phi$,*

$$\dim_H E_\Phi(\alpha) = \dim_P E_\Phi(\alpha) = \Lambda_\Phi(\alpha).$$

THÉORÈME 2. – *Supposons que $\Phi : \{0,1\}^N \to \mathbf{R}^d$ est une application ne dépendant que des k premières coordonnées de x. On a :*
(1) *$L_\Phi = \varphi(\Delta_k)$;*

(2) *pour tout* $\alpha \in L_\Phi$,

$$\Lambda_\Phi(\alpha) = \max_{p: p\in\Delta_k, \varphi(p)=\alpha} H(p).$$

THÉORÈME 3. – *Supposons que* $\Phi(x) = (x_1, x_1x_2, \ldots, x_1x_2\cdots x_k)$. *On a :*

(1) L_Φ *est l'ensemble des points* $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_k)$ *tels que* $1 \geq \alpha_1 \geq \alpha_2 \geq \cdots \geq \alpha_k$ *et que la suite* $\{\alpha_j\}_{j=0}^k$ *(avec* $\alpha_0 = 1$*) soit convexe, i.e.* $\alpha_i - 2\alpha_{i+1} + \alpha_{i+2} \geq 0$ $(\forall 0 \leq i \leq k-2)$;

(2) *pour tout* $\alpha \in L_\Phi$, $\Lambda_\Phi(\alpha)$ *s'exprime comme*

$$2h(\alpha_{k-1} - \alpha_k) + h(\alpha_k) - h(\alpha_{k-1}) - h(1-\alpha_1) + \sum_{j=0}^{k=2} h(\alpha_j - 2\alpha_{j+1} + \alpha_{j+2}),$$

où $h(x) = -x\log_2 x$.

Voici un corollaire du théorème 3. Soit $\Psi(x) = x_1x_2\cdots x_k$. Pour tout $0 \leq \beta \leq 1$, on a

$$\dim_H E_\Psi(\beta) = \dim_P E_\Psi(\beta) = \sup \Lambda(\alpha_1, \ldots, \alpha_{k-1}, \beta),$$

où Λ_Φ est la fonction précisée dans le théorème 3 et le sup est pris sur la section de Δ_k définie par

$$D_{k,\beta} = \{(\alpha_1, \ldots, \alpha_{k-1}) : (\alpha_1, \ldots, \alpha_{k-1}, \beta) \in \Delta_k\}.$$

A. Bisbas et al. ont obtenu une autre formule en utilisant une méthode différente (*voir* [3], [4]). Une conséquence directe du théorème 2 donne le résultat obtenu par P. Billinsley dans le cas $\Phi(x) = ((1-x_1)(1-x_2), (1-x_1)x_2, x_1(1-x_2), x_1x_2)$ (*voir* [2]). Même dans ces cas particuliers, nos résultats sur le bord de L_Φ sont nouveaux.

Les résultats que l'on vient de présenter se généralisent aux cas de sous-décalage de type fini sur un alphabet fini. Nous espérons que le théorème 2 s'étend au cas où Φ est seulement continue ou höldérienne.

4. Idées de démonstrations

Les preuves des trois théorèmes sont indépendantes. D'ailleurs, les formules exprimant la dimension sont en apparence différentes.

Pour majorer la dimension, nous utilisons un 2^{-n}-recouvrement naturel pour l'ensemble en question $E_\Phi(\alpha)$. Il s'agit de la famille de n-cylindres intervenant dans la définition de $f(n, \alpha, \varepsilon)$ (*voir* section 2).

L'essentiel est la minoration pour laquelle deux méthodes sont utilisées. Pour les théorèmes 1 et 3, on construit un sous-ensemble de $E_\Phi(\alpha)$ ayant une structure d'ensemble homogène de Moran dont la dimension se calcule [10]. Tandis que pour le théorème 2, on construit sur $E_\Phi(\alpha)$ une mesure de Gibbs, d'une façon plus directe et plus concrète que d'habitude, dont la dimension se calcule aussi (*voir* [9] pour la notion de dimension de mesure).

Cette construction de mesure de Gibbs est la clé de la preuve. Elle pourrait être utilisée dans d'autres situations. Nous la présentons ici. Soit $p \in \Delta_k$ tel que $p(\cdot) > 0$. Définissons, pour $n \geq 1$,

$$q_n(a_1, \ldots, a_n) = \sum_{\varepsilon_{n+1}, \ldots, \varepsilon_k} p(a_1, \ldots, a_n, \varepsilon_{n+1}, \ldots, \varepsilon_k) \qquad (\text{si } n \leq k),$$

$$q_n(a_1, \ldots, a_n) = p(a_1, \ldots, a_k) \prod_{j=2}^{n-k+1} t(a_j, \ldots, a_{j+k-1}) \quad (\text{si } n > k),$$

où

$$t(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_k) = \frac{p(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_k)}{p(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{k-1}, 0) + p(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{k-1}, 1)}.$$

Il est facile de vérifier que

$$\sum_{\varepsilon_{n+1}} q_{n+1}(a_1, \ldots, a_n, \varepsilon_{n+1}) = q_n(a_1, \ldots, a_n) = \sum_{\varepsilon_1} q_{n+1}(\varepsilon_1, a_1, \ldots, a_n).$$

D'après un théorème de Kolmogorov, il existe une unique mesure T-invariante μ_p telle

$$\mu_p(I(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)) = q_n(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)$$

et en particulier $\mu_p(I(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_k)) = p(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_k)$. C'est en fait la mesure de Gibbs dont la fonction d'énergie est $\phi(x) = \log t(x_1, x_2, \ldots, x_k)$.

Observons que $H(p)$ dans le théorème 2 n'est autre que l'entropie de la mesure de Gibbs μ_p.

Références bibliographiques

[1] Besicovitch A.S., On the sum of digits of real numbers represented in the dyadic system, Math. Ann. 110 (1934) 321–330.
[2] Billingsley P., Ergodic theory and information, Wiley, New York, 1965.
[3] Bisbas A., A note on the distribution of digits in dyadic expansions, C. R. Acad. Sci. t. 318 série I (1994) 105–109.
[4] Bisbas A., On the distribution of digits in dyadic expansion, Results in Math. (to appear).
[5] Bohr R., Rand D., The entropy function for characteristic exponents, Phys. D 25 (1987) 387–398.
[6] Brown G., Michon G., Peyrière J., On the multifractal analysis of measures, J. Stat. Phys. 66 (1992) 775–790.
[7] Collet P., Lebowitz J., Porzio A., The dimension spectrum of some dynamical systems, J. Stat. Phy. 47 (1987) 609–644.
[8] Eggleston H.G., The fractional dimension of a set defined by decimal by decimal properties, Q. J. Math. Oxford Ser. 20 (1949) 31–46.
[9] Fan A.H., Sur les dimensions de mesures, Studia Math. 111 (1) (1991) 1–17.
[10] Feng D.J., Rao H., Wu J., Some dimensional results for homogeneous Moran sets, Science in China (series A) 40 (5) (1997) 475–482.
[11] Jaffard S., Meyer Y., Pointwise behavior of functions, Memoirs of Amer. Math. Soc., 1996.
[12] Mandelbrot B.B., Possible refinement of the lognormal hypothesis concerning the distribution of energy dissipation in intermittent turbulence, in: Statistical Models and Turbulence, M. Rosenblatt, C. Van Atta (Eds.), Lect Notes in Physics 12, Springer, 1972, pp. 331–351.