Reduced row-echelon forms in (p×q)-matrices for 'small' p, q.

(Here a, b refer to 'arbitrary real numbers a, b.')

(1×1)-matrices:

Rank 0: $\begin{bmatrix}0\end{bmatrix}$

Rank 1: $\begin{bmatrix}1\end{bmatrix}$

(1×2)-matrices:

Rank 0: $\begin{bmatrix}0&0\end{bmatrix}$

Rank 1: $\begin{bmatrix}0&1\end{bmatrix}$; $\begin{bmatrix}1&a\end{bmatrix}$

(2×1)-matrices:

Rank 0: $\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$

Rank 1: $\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$

(2×2)-matrices:

Rank 0: $\begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix}$

Rank 1: $\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix}$; $\begin{bmatrix}1&a\\0&0\end{bmatrix}$

Rank 2: $\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}$

(1×3)-matrices:

Rank 0: $\begin{bmatrix}0&0&0\end{bmatrix}$

Rank 1: $\begin{bmatrix}0&0&1\end{bmatrix}$; $\begin{bmatrix}0&1&a\end{bmatrix}$; $\begin{bmatrix}1&a&b\end{bmatrix}$

(2×3)-matrices:

Rank 0: $\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}$

Rank 1: $\begin{bmatrix}0&0&1\\0&0&0\end{bmatrix}$; $\begin{bmatrix}0&1&a\\0&0&0\end{bmatrix}$; $\begin{bmatrix}1&a&b\\0&0&0\end{bmatrix}$

Rank 2: $\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$; $\begin{bmatrix}1&a&0\\0&0&1\end{bmatrix}$; $\begin{bmatrix}1&0&a\\0&1&b\end{bmatrix}$

(3×1)-matrices:

Rank 0: $\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$

Rank 1: $\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}$

(3×2)-matrices:

Rank 0: $\begin{bmatrix}0&0\\0&0\\0&0\end{bmatrix}$

Rank 1: $\begin{bmatrix}0&1\\0&0\\0&0\end{bmatrix}$; $\begin{bmatrix}1&a\\0&0\\0&0\end{bmatrix}$

Rank 2: $\begin{bmatrix}1&0\\0&1\\0&0\end{bmatrix}$

(3×3)-matrices:

Rank 0: $\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}$

Rank 1: $\begin{bmatrix}0&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}$; $\begin{bmatrix}0&1&a\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}$; $\begin{bmatrix}1&a&b\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}$

Rank 2: $\begin{bmatrix}1&a&0\\0&1&0\\0&0&0\end{bmatrix}$; $\begin{bmatrix}1&0&a\\0&1&b\\0&0&0\end{bmatrix}$

Rank 3: $\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$