黃金分割也是對稱？

● 陳之藩

黃金分割(Golden ratio)真是個老得不得了，卻又新得不得了的話題。它的開始總是推到意大利人 Leonardo Pisano 的費布奇序列(Fibonacci)；那是十三世紀的事。近則近到最時興的平行計算中的平行算法：不是二分制而是黃金分割很有效。

我們日常生活中舉凡有關建築、裝飾、設計、優選等等總難免涉及黃金分割。具體説起來，如好看的門窗，悦目的形體，以及電視幕上講者的位置，一張畫中重點之所在，固然多與黃金分割有關，就是科學方面，比如控制一個動力系統，補償設計也竟有黃金分割的數字出現。最美身材維納斯雕像呈現了好多組黃金分割比例，這是大家所熟知的。①

一

黃金分割這個數字可以是由費布奇序列推出；而費氏序列是這樣開始：

0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, ……

第三數是前二數之和，也就是 0 加 1 等於 1；然後是 1 加 2 等於 3，再其次是 2 加 3 等於 5，以此類推。如果用精確的代數式表示是：

$$A:B=(A+B):A \qquad (1)$$

如果把 $A+B=1$ 這個條件引入，則黃金分割的定義可寫成

$$A^2+A=1 \qquad (2)$$

解出 A 來，我們於是導出 0.618 與 0.382 這個黃金分割數組。一個小的長方形的信封，或大些的長方形的信紙，一張畫長與寬的比例，最好是用 0.618:0.382 看來最美。近似值則可以用 3:2，或者 5:3 或者 8:5 等等。

二

中國數學《九章算經》中處理過一個開方的問題②，式子看來與(2)相似，但相信並不是相同，所以說在《九章算經》中並沒有明顯的說明或暗含着透露過黃金分割。

《九章算經》的勾股章中有一種帶從開方法；需要解下列方程：

$$x^2 + 34x = 71000 \qquad (3)$$

這個方程可以換一下尺度，用

$$x = 34y$$

代入，於是(3)式變成

$$y^2 + y = 61.4 \qquad (4)$$

現在把(4)與黃金分割的定義(2)相比：兩式的等號左邊完全相同，不過兩式的右邊卻不一樣。(2)式中等號右邊是1；(4)式中等號右邊卻是61.4。自然，《九章算經》中的(3)式，不是黃金分割了。

如果把(3)解出來

$$x = 250 \qquad (5)$$

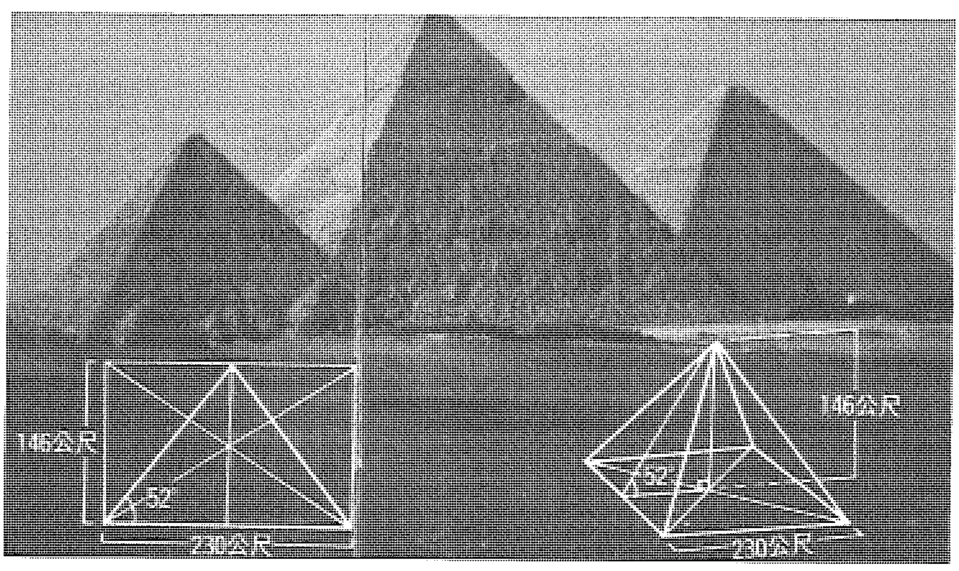
遍尋《九章算經》，卻找不到，也許我未看到，與0.382對應的數字，也就是154.5，如果我找到這個數字，就可說中國那時有黃金分割了。

《九章算經》不是出自一人手筆；最後編注者應是祖沖之，但祖注釋已失傳；再早的是劉徽，那是第三世紀了③。

我們不敢說，中國曾否發明黃金分割。但是黃金分割之美、之簡單，可以與畢氏定理相比。《周髀算經》中既然有獨立發展出的勾股弦定理特例：勾等於3，股等於4，弦等於5，中國的數學文獻中不見得沒有黃金分割的存在，我們只是不敢說而已。

三

另一個古文明與古遺迹，是埃及的金字塔。我沒有研究過金字塔建於何年的歷史；可是金字塔現在仍在那裏，很易丈量。有一記載是金字塔之寬是230米；高是146米。這個比例是0.612與0.388，與黃金分割之比例已



精確到小數點後第三位了。換句話說，只有千分之幾的差別。

貝聿銘為法國的宮前廣場所設計的玻璃金字塔屋頂，不知寬與高成何比例；我想黃金分割的數字不會不在貝氏腦際掠過，因為黃金分割已是現代建築師們常常想到的數字了。但是，貝氏如用這個黃金比例；是因為這種形狀是最穩定呢？還是這種形式最美觀呢？正如古埃及人修金字塔時，據説他們先做了好多實驗，才定出金字塔的形式來。那麼，那些古埃及人所以用黃金比例來建金字塔，是因為建成這樣最穩定呢？還是建成這樣最壯觀呢？愈想金字塔，更覺得黃金分割近乎神秘。

四

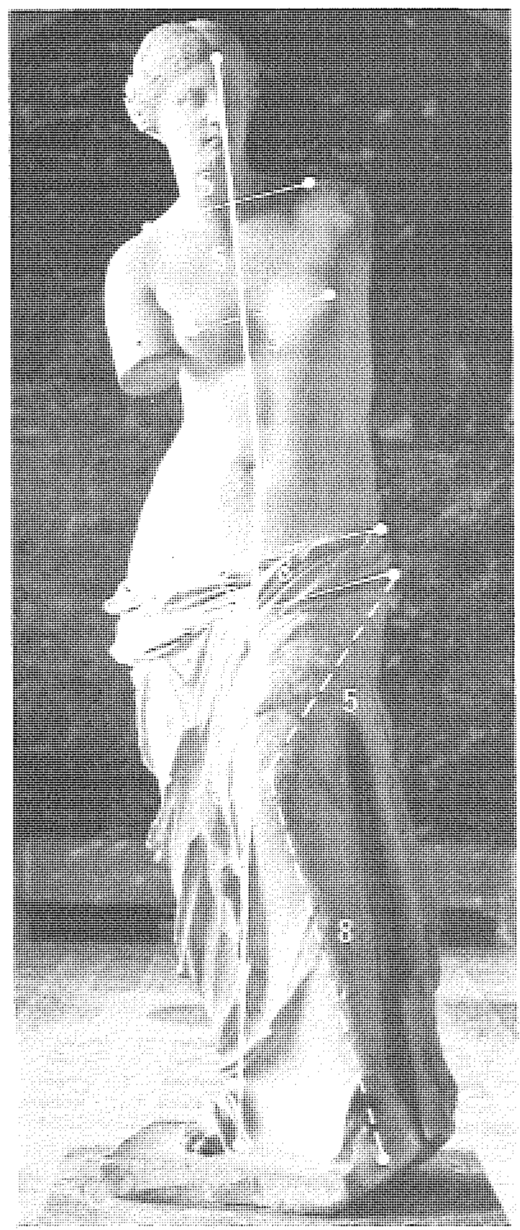
我前幾天，忽發奇想：為甚麼發此奇想，不得而知。很有可能是因為搞平行計算，有人提出黃金分割的分法來。平行計算何以出現了黃金分割④，我還答不上來；但我卻對黃金分割為甚麼美，意外的得到一個暫時的答案。這個答案也許比不答或答不上來好一些。

我們還是拿維納斯的身材來說：從她的頭頂到她的肚臍與從她的肚臍到她的腳心其比例為：0.382:0.618。二數相加自然是她的身高「1」。

這兩個數字實在無甚希奇；也無美或好可言。但，我忽然又覺得：這是十進位所表現出來的兩個數；而十進位雖是全人類通用有年的制度，也許並不是很好的制度。我的成見是十進位太過人工化，不如二進位，三進位，五進位。因為1,2,3,5,7等全是素數；而十卻不是素數。不用素數而用非素數的「十」當基數，常常令我不解。

十進位不是太好的制度，也許是二進位登場的大理由。五十年前，人類忽然用起二進位來。大家都知道二進位一進入人類舞台，如同一聲霹靂自天而降。計算機時代開始了。這五十年所計算的數量，於是比人類五千年所計的數量恐怕還多罷！

所以，我就把黃金分割兩個神秘的數字分別由十進位的表示換成二進



位的表示。這是再容易不過的事了：即把該數乘以「2」，取整數部位的值；再乘「2」於小數點以後的數；再取整位的值。以此類推，黃金分割的二進位表示，於焉得出：

$$0.618_{(十進位)} = 0.1001111001_{(二進位)} \quad (6)⑤$$

$$0.382_{(十進位)} = 0.0110000110_{(二進位)} \quad (7)$$

在得出這個結果以後，我注視着這二進位表示的黃金分割難免驚異：竟然是如此「對稱」的圖形！

以0.618來說，它的二進位表示是：在小數點以後我們看到的是「1」；接着兩個「0」；再接四個「1」；再下面是兩個「0」，然後是「1」。小數點後的這十個數目字，我們如在第五至第六之間樹一鏡面，左邊與右邊是對稱的。

0.382的二進位表示如(7)所示，它正是(6)式的補數，也就是把(6)式中的「0」換成了「1」；並把「1」換成了「0」就成為(7)，所以(7)式也是左右對稱的。

可是如在(6)式與(7)式中間平放一鏡面，自然原數(6)與補數(7)的「對稱」，也就是上下的相補對稱極易看出。(6)與(7)這兩個數如加起來，是小數點後十個「1」。我們是用小數點後十個「1」來代表整數值「1」。當然是近似值。不過(2)式的解是由$\sqrt{5}$而來，是個無理數，任何有理數的表示法只有近似而已。

五

八、九年前罷，在香港，有一次華羅庚來演講。他並沒有講他的數論；而是上得台來，從褲袋裏像是魔術師似的掏出一根繩子來。他嘴上吸着香煙，還是另有打火機我記不清了，把繩子折了一下用香煙燒了一個痕迹；再折一下又燒一個痕迹，很快的我們看出來他在講黃金分割。他用香煙在繩子上所燒痕迹即是0.618處。

文化大革命時期，抽象數論幾乎被視為牛鬼蛇神，豈容學術權威「亂講」！但華羅庚自有他的生存之道，他上山下鄉，作汗流浹背、或焦頭爛額狀，幫助農民豐收，協理工人優選，到處講黃金分割的實用與實效。他在香港講了好多農業運籌，工人優選的例子，比例總是落在黃金分割上。

正是十年前罷，也是在香港，聽楊振寧演講。他講的是「對稱與二十世紀物理」。他從雪花形狀的對稱，講到音樂的對稱，講到畫的對稱，講到馬克士威爾方程的對稱以及他自己的規範場的對稱。從日用常見到物理精微，集「對稱」之大觀。

也是十多年前罷，也是在香港，陳省身來講，數學家卻是從人類物理的四大公式說起，四大公式即是牛頓的、馬克士威爾的、愛因斯坦的、楊振寧——密勒的四大公式，涉及他的纖維叢及楊的規範場的對稱。

也許華羅庚所宣傳的黃金分割之所以有效與楊振寧的對稱「宗教」或陳省身的數學「實在」有着關聯？而黃金分割與二進位表示出來時有對稱之美或者有所牽繫？

「用」是來自「真」？還是「真」來自「美」？造化之工似乎到處在顯示，卻又不時的隱藏起來。

註釋

① 任何數學百科全書，均有黃金分割條。近期雜誌專載的，有《牛頓雜誌》第26期。

② 参看李儼與杜石然著《中國數學》，英譯本是*Chinese Mathematics: A Concise History* (Oxford, U.K.: Clarendon Press, 1987)。

③ Needham, J.: *Science and Civilization in China*, vol. 3, pt. I (Cambridge, U.K.: Cambridge University Press, 1959).

④ Munro, I. and M. Paterson: "Optimal algorithms for parallel polynomial evaluation", *Journal of Computer System Science* (1973), pp. 189–98. 提到Estrin法的一個改進程序是用黃金分割來代替二等分。據云黃金分割在此處之利用係Maraoka所創。

⑤ 在私人通信裏，沈乃正以電腦計算的0.618的二進位表示法得出以下結論：

0.618和0.382之二進位循環節恰為一百位小數，附表以電腦算出之0.618的四百零二位小數，從第三位起，每百位小數為一循環節。

此一循環節前五十位小數和後五十位互補。

換句話說，每一百位為一單位構成平移對稱；而每一節自己又是互補的鏡而對稱。

```
....+....1....+....2....+....3....+....4....+....5    (算位數用)

1001111000110101001111110111110011101101100100010110'
  '10000111001010110000001000001100010010011011101001'    1～102位

  '01111000110101001111110111110011101101100100010110'  }
  '10000111001010110000001000001100010010011011101001'  } 循環節100位

  '01111000110101001111110111110011101101100100010110'
  '10000111001010110000001000001100010010011011101001'

  '01111000110101001111110111110011101101100100010110'B
  '10000111001010110000001000001100010010011011101001'B
```

0.618的二進位表示，算到小數點後402位

陳之藩　河北霸縣人，天津北洋大學畢業，英國劍橋大學哲學博士。曾任香港中文大學電子系講座教授，美國休士頓大學電機系教授，現任美國波士頓大學應用科學系教授。著有《控制系統通論》(Prentice-Hall出版)及《陳之藩散文集》(台灣遠東圖書公司出版)，學術論文八十餘篇載英、美電工學報，散文載於港、台諸報刊。