Journal of Basic Education, Vol. 16 No. 1, 2007

基礎教育學報，第十六卷第一期，二零零七年

海龍(Heron)公式怎麼教？
一個HPM的教學插曲

洪萬生

台灣師範大學數學系

蘇俊鴻

台北市立第一女子中學

本文第二作者蘇俊鴻利用二至三節課的時間，為兩班高一學生（每班30人）提供「海龍公式」的三種證明：(1) 利用餘弦定律的現代教科書證明，(2) 清初數學家梅文鼎的證明，(3) 海龍自己的證明。並在課後請學生填寫回饋單，兩班共回收50份。本文將根據此教學插曲，說明HPM [1]介入的教學活動可能之影響。我們發現在HPM的引導下，無論教師或是學生才有可能從教材單元的知識內容中獲得某種程度的解放，得以可能「鬆綁」或「顛覆」教材中較「制式的」（conventional）面向，此次海龍公式HPM教學插曲正是一個例證。

關鍵詞：海龍公式、HPM、詮釋學循環

前言

海龍公式 $\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$（其中 a,b,c 分別是一個三角形的三邊，且 $s=(a+b+c)/2$）怎麼教？這個教學活動，緣起於2006年春季，本文第一作者於台灣師大數學系主持的「數學史討論班」。由於此一公式的證明的幾個中文版本各具特色。從明末到民初，我們在中算史上總共搜尋到五個不同的證明版本，依序分別載於 (1) 羅雅谷 (Rho Giacomo, 1590–1638)《測量全義》卷四；[2] (2) 梅文鼎 (1633–1721)《平三角舉要》卷四；[3] (3) 康熙皇帝敕編《數理精蘊（下編）》卷十七[4] (4) 李善蘭，《天算或問》；(5) 美國羅密士 (E. Loomis, 1811–1889) 著，潘慎文 (A. P. Parker, 1850–1924) 選譯《八線備旨》卷二 (1893)。[5]

於是，在討論班上，我們從認識論與方法論兩個面向，基於成員的實際教學經驗，探索這些證明版本之特色。為此，我們當然一併討論海龍（Heron，西元一世紀）在*Metrica*一書中所提出的原版證明。[6]我們將這六個證明分配給研討班成員研讀、發表與討論，並撰寫書面報告，最後輯錄成「海龍公式專輯」（《HPM通訊》第9卷第4期，由本文第二作者擔任客座主編，2006年4月出版）。[7]此外，我們在探討相關數學家如何證明的同時，也希望參照現代學習者（譬如高中學生）的反思，以便考察教師出入「歷史現場」與「教學現場」是否可以相互為用。[8]此外，為了瞭解學生對於海龍公式不同證明的方法論之反思，本文第二作者將討論班中有關海龍公式的心得，引入他自己的課堂進行實際教學，並以問卷蒐集學生的回饋意見（參見本文附錄一），據此分析HPM介入教學活動之可能影響。[9]首先，讓我們來考察海龍公式在目前課程中所處的位置。

海龍公式

按現行台灣高中（學生年齡：15–18）教材之安排，海龍公式出現在高一下學期有關三角函數的學習脈絡中，主要被當成熟練餘弦

定律的典範例。它的證明過程涉及了教師在三角函數教學時，所強調的知識與技巧。比如：

- 透過平方關係轉換正、餘弦；
- 餘弦值與邊長的關係（譬如$\cos A = (b^2 + c^2 - a^2) / 2bc$）；
- 乘法公式的使用。

然而，如此安排卻也造成海龍公式的「教學盲點」，譬如教師就很少進一步討論下列問題：

- 海龍公式為何會被提出？
- 在海龍公式中，$s-a$，$s-b$，$s-c$有什麼幾何意義？
- 有沒有其他證明海龍公式的方法？
- 是否只能在三角函數的脈絡下，介紹並證明海龍公式？

事實上，這些問題也標誌著我們研究海龍公式及其教學實驗的基本構想，亦即，我們打算深入探索海龍公式的歷史，藉以對比不同證明版本，引發學生理解數學知識的演進之意義。

在第二作者的教學實驗中，介紹了三個海龍公式的證明，依序是海龍的證明、梅文鼎的證明，以及教科書中常見的證明。[10]

為何只選擇介紹海龍與梅文鼎呢？第二作者在活動設計之初所持的想法如下：

> 海龍是最早提出證明的數學家，在他的證明過程中，充分運用歐氏幾何的性質，正是一個歐氏幾何的典範例。至於梅文鼎的證明，從教學上來看，則可視為海龍證明的改良版，它凸顯幾何證法的演進。另一方面，由於這兩個幾何證明與教科書中的代數證明形成強烈對比，希望藉以引發學生的學習動機。因此，在教學目標與時數的考量下，〔我〕選擇上述兩個證明，作為此次教學活動的材料。[11]

教學活動簡介

此次教學實驗過程及學生背景簡要說明如下：第二作者任教高一兩個班級，均為數理資優班（每班30位學生，在本文中以A、B班

稱之），學生都經由甄選考試入學，普遍具備數學及理化方面的優秀能力，學習態度主動積極，樂意參與討論。因此，這兩班的課程內容比起一般非資優班級來得深且廣。在2006年3月14–15日，第二作者使用二至三節課（每節課50分鐘）的時間，實施了有關「海龍公式」三種證明比較之教學活動。基於教學策略的考量，其順序特意安排如下：

1. 運用餘弦定律的現代教科書證明
2. 清初數學家梅文鼎的證明
3. 海龍的原始證明

在講解了上述（1）之後，他立即詢問學生下列問題：

- 妳覺得海龍公式的特點為何？
- 海龍公式中，$s-a$，$s-b$，$s-c$有什麼幾何意義？

藉以引發學生討論。一旦學生知道海龍是西元一世紀的人物時，「海龍如何證明海龍公式」的問題自然出現，於是，第二作者就將課程導引到梅文鼎與海龍兩人的證明上，將他們兩人的幾何證明圖形在黑板上逐步畫出，並運用「問答互動」的方式，將證明完成。

有關實際教學概況，第二作者事後概述（針對A班）如下：

> 證二（梅文鼎）與證三（海龍）的方法是在同一節進行，將證法二必須證出直角的部分留為習題，但進行相當流暢。證三（海龍）則是進行得相當緩慢，在解說上較未掌握轉折處的停留，且證完後即為下課時間，未能給學生填寫問卷、思索及發問。（按：(1) 證一已於前一節中教完；(2) 問卷於事後才回收，所以份數較少）[12]

至於針對B班，則概述如下：

> 證一（餘弦定理）與證二（梅文鼎）是同一節進行。但證二的教學上遇到「直角證明」的停頓（當場無法解決），留為課後作業。至於證三（海龍）則進行流暢，〔學生〕驚喜連連。[13]

教學結束後，請學生填寫回饋單，兩班共回收50份（A班23份，B班27份）。

結果分析

正如前述，這一教學活動的目標，是希望透過這些證明的比較，促使學生更深入理解不同的證明形式。同時，也分析學生喜好的原因，有助了解她們對於證明的看法。最後，再考察這三個證明的問世時間順序，[14]有無影響學生對於它們之評價。回饋單初步的統計表列如下：

表一　學生回饋單初步統計

證明	教科書	梅文鼎	海 龍	與「時間」順序無關
A班	10	6	7	5
B班	7	1	19	5
總計	17	7	26	10

由學生的回饋單來看（見附錄一），[15]她們對於證明中所使用的性質多能理解，並據此評價各個證明。以學生A1的評論為例（見附錄一）：

- （教科書）非常簡捷〔潔〕易懂，但流於機械運算，不用有靈感或直覺應該就寫得出來。
- （梅文鼎）跟海龍證明有不同之美，比較偏向角度與相似形的運用。
- （海龍）我個人覺得是幾何的集大成，要能靈活運用圓內接四邊形、內心、相似形以及母子相似性質。

至於學生對於證明的喜愛，多數視證法是否容易理解而定：

B2：（教科書）最好懂。

A4：（梅文鼎）還滿〔蠻〕有邏輯性的，不會太難（步驟）又很漂亮

A6：（海龍）運用很基本的運算及幾何知識即能證出。

然而，我們也發現學生對於證明的喜愛，不一定是受到證明本身的吸引，還有其他外在因素的考量。以前引學生A1為例，她喜歡的證明為何？答案令我們相當意外：

考試時，我喜歡用餘弦定理（教科書證明），出錯率較低。但若是純粹為了數學練習，我會比較喜歡海龍的證明。畢竟越原始的數學方法〔證明〕好像常以簡單的數學方法來呈現，常有數學驚嘆之美，富有巧思。

顯然，考試壓力影響著學習的態度。然則，這是否進而影響她們對於數學的信念或數學知識的價值判斷？我們在她們喜愛教科書證明的看法中，似乎可以略見端倪。事實上，在17名喜愛教科書證法的學生中（見表一），有13名是基於可以「套公式」、「快速易懂」的考量。然而，弔詭地，此一特色也是不喜歡教科書證法的學生所在意的，「太工具了」、「流於機械運算」。

至於學生對於證明的喜好之判斷，是否與該證明問世的「時間」順序相關，看來也是各有定見。我們不妨再引前述學生A1的意見：

多少會有影響。因為解題所運用的定理會不一樣。如果要看懂近代的數學證明，可能要再去翻一大堆已被證明的定理，後人通常會依著前人已鋪的康莊大道登頂，但是我覺得走崎嶇的道路會有更多的驚奇。

針對同一問題，學生B2則回答說：

無影響。根本不去考慮「它」的時代。

這種「務實」的態度，似乎也與她對證法一（教科書證法）的評論同調：「正常！平易近人」，因為它「比起海龍平凡多了」，儘管她也承認海龍的原始證法（證法三）「很漂亮」。

不過，我們也發現數學知識演化這一因素如何影響她們對於不同「時代」證法之評價。透過這些證明的比較，學生多能指出數學知識的累積與演進之意義，但是，針對它所扮演的角色，則正面或負面之評價就說不定了，這是一個相當有趣的現象：

A5：隨著三角函數、餘弦定理，能用的工具越來越多，證明越來越簡捷（簡便快捷）漂亮。

A2：因為時間的不同，背景也不同，工具的多寡也有差異。這讓我最佩服海龍的證法（西元一世紀），即使同樣為幾何證法的梅文鼎比較簡明，仍然不影響海龍的地位。

無論學生喜歡何種證法，她們也都注意到方法的演化或精進所呈現的意義，可見這種教學策略比起所謂的「一題多證」教學法，似乎更能促進方法論的反思了。

就整體結果來說，最引人注意的，莫過於兩班學生對梅文鼎證明都給了低評價。在數學史討論班中，有些成員認為梅文鼎的證明比海龍的證明更宜於教學。令人意外地，學生的反應顯然並不一致。進一步檢視回饋表，我們發現在教學過程中省略部分證明，直接視為成立加以使用，而影響了她們的評價：「『感覺』比較平淡，可能因為沒證完吧！」(B1)。反倒是海龍的證明，由於展示了她們所熟悉的幾何性質如何派上用場，而獲得頗多的讚賞：「輔助線與線段的替代過程，給人一種疑惑而又恍然大悟的驚喜。」(B5)。當然，這是否意味著她們對於數學證明有著某種既定的印象，還值得再深入探討。[16]

另外一個值得注意的現象則是，B班對於三種證明喜愛的分佈不若A班平均，而呈現了大幅差距。這兩班學生之條件相當，何以致此？參考第二作者以下的教學紀錄反思，或許可以提供一點線索：

> 在A班上課時，梅文鼎與海龍的證明安排在同一節進行，由於時間因素，對於海龍的證明進行較為平淡，解說時未能在轉折處多作停留，且證完後即是下課時間，未能給學生思索及發問的時間。而B班進行教學時，則是運用完整一節課進行海龍的證明。因此，在轉折處多所引導，對於使用的幾何性質亦有提示。過程進行流暢，學生驚喜連連。[17]

這個現象透顯出數學原典引進課堂之中如何生效，不僅材料的選擇十分重要，教學策略的運用也必須與教學目標相符才行。同時，教學過程中的執行細節（如想法轉折的等待時間多寡），對於學習效果所造成的影響，可能遠比想像來得大。這有待我們進一步探討。

結論

總的來看，此次使用HPM介入的教學法之影響，我們可從兩個觀點來看：一是從學習者的觀點，研讀這些不同文本，等於和過去偉大的數學家進行對話，形成自身的詮釋，透過比較（不同文本或教科書版本）能深化對數學概念的理解，而形成自己的觀點。以海龍公式為例，唯有跳出教科書的局限，學生才能比較幾何形式證法與代數證法的差異，也才可望理解何以海龍、梅文鼎只能運用幾何證法，並且察覺到數學知識的演化與累積：

> 就是因為海龍當時無法任意使用餘弦定理，才能有如此漂亮的證明。相較於餘弦定理的方法，雖然快且易懂，但缺少了理解證明三（海龍的證明）時的樂趣。[18]

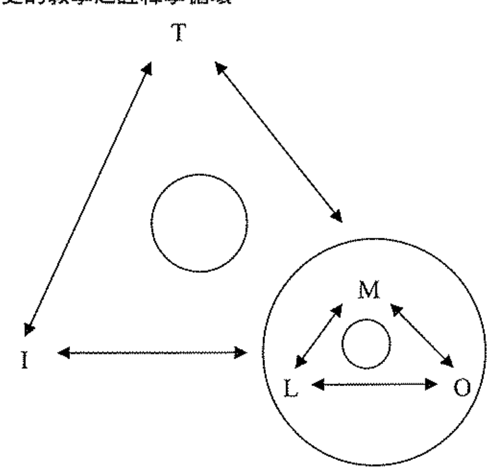
另一方面，從教師觀點來看，這種更廣泛的理解，可以為這些概念提供新的教學情境，甚至協助教師預見學生在掌握這些概念的現代定義之意義時，所遭遇的困難或迷思。當然，這也能驗證自我對教材內容和學習者的了解是否足夠。以此次海龍公式教學實驗為例，教學材料來自數學文本的研讀，教師在教學目標、學生以及教材或文本的詮譯三者配合下，設計出不同的教學活動。也因為跳出教科書的局限，讓教師注意到學生對數學證明的概念、證明教學活動的更多細節等問題，並在下次的教學中得以調整。且看第二作者的反思：

> 透過整理學生的回饋表，讓我有不少的收穫。首先，同學經由這些不同年代的版本，更加理解海龍公式。並在比較之後，也都覺察到她們所掌握的工具是比以前的數學家更多，數學知識的積累，所以呈現不同的證明特色。不過，喜愛哪一個證明，則就各有定見。但是，她們對於梅文鼎評價的落差，出乎我的預期。由回饋中看來，學生對於證明沒有完整，似乎頗為介意。我想會在下次試著將梅文鼎的證明完整呈現，再看看效果如何。此外，兩個班級對於海龍評價的差異，也是讓我大吃一驚！對於這個現象，我的想法：可能是

受到國民中學階段幾何課程刪減的影響，學生對於幾何語言的熟悉程度不若以往。因此，多花些時間等待她們理解每個步驟，讓她們充分感知這個證明用的都是她們所了解的性質，讓那種感動左右她們的判斷吧！看來，證明教學該留意的問題還不少，需要再進一步探討才行。[19]

教師出入「歷史現場」與「教學現場」所帶來的影響，我們透過「詮釋學循環」的架構可以更清楚地說明。根據詮釋學的理論，「詮釋本身會發生在一個形成假設與徵之於文本的驗證的循環過程之中」。[20]當教師將歷史引進教學活動時，他必須同時說明數學知識的「斷代」與「演化」面向。因此，他在「次圈」（指教師、詮釋教材內容及「初圈」的互動環）中進行他自己的「歷史詮釋」時，勢必（引導學生）針對文本形成假設並設法驗證，而這自然引發他自己或學生探索文本作者（譬如數學家）自己的理論或詮釋。因此，基於HPM的引導，教師可以幫助學生從外圍的「次圈」走向內圍的「初圈」（指古代數學家、數學理論及數學物元的互動環），再從「初圈」走回「次圈」，如是者構成一個所謂的「詮釋學循環」（見圖一）。[21]在這個循環過程中，任何人（不管是教師或學生）都扮

圖一　引進數學史的教學之詮釋學循環



T：數學教師　I：詮釋教材內容　M：古代數學家　L：數學理論　O：數學物元

演了「詮釋者」的角色。而且，由於教學目標是數學知識，所以，「初圈」的操作當然受到「次圈」的主導，從而可以保證數學教學活動，不會迷失在漫無目的之瑣碎歷史細節中。[22]此外，在這個過程中，由於教師或學生都被期待進行詮釋性反思（譬如形成自己的假設）。唯有如此，教師與其學生才有可能從某教材單元的知識內容中獲得某種程度的解放，從而可以想像自己進入那些活在另一時代、另一文化中的數學知識活動參與者之心靈之中，得以可能「鬆綁」或「顛覆」教材中較「制式的」(conventional) 面向，此次海龍公式HPM教學插曲正是一個例證。

註釋

1. 所謂HPM原來是指「數學史與數學教學之關聯的國際研究群」(International Study Group of the Relations between History and Pedagogy of Mathematics)之簡稱，現在也泛指探討數學史與數學教育之關係的一門學問。
2. 收入《崇禎曆書》(2000)，故宮珍本叢刊，海口：海南出版社。
3. 收入《梅氏叢書輯要》(1971)，台北：藝文印書館。
4. 王雲五主編 (1968)，台北：台灣商務印書館。
5. 我們根據的版本是1909年出版的《八線備旨》，上海：上海美華書館。
6. 收入Fauvel & Gray (1987), pp. 205–206.
7. 參考http://www.math.ntnu.edu.tw/~horng/。第一作者也曾根據此一專輯內容，以 "Teaching Heron's Formula in Context" 為題，應邀參加Mini-Workshop at MF Oberwolfach, Germany (May 1–5, 2006) 之Studying Original Sources in Mathematics Education發表。
8. 依據我們所發展出來的「詮釋學四面體」模型（參考洪萬生，2004、2005），教師同時擁有史家的身分，因此，當教師出入其中一個現場時，都會參照他（她）在另一個現場的反思。另外，數學史與數學教育這兩個學門之研究如何相互發明，可參考 Berggren (1990).
9. 本文第二作者曾指出：「引發筆者對於海龍公式及其證明的興趣，其實

是來自高中時代對於海龍公式證明的困惑。尤其，當我得知海龍是約為西元一世紀左右的數學家時，很難相信他會是利用餘弦定律來證明海龍公式。直到有機會在《天才之旅》一書中看到海龍公式的證明時，那種豁然開朗的暢快，至今印象深刻。因此，只要我的課程進行到此處，總會將海龍的證法與學生分享。」(蘇俊鴻，2006)。

10. 上述這些證明的詳細內容，可參閱《HPM通訊》第9卷第4期。
11. 引自第二作者的教學反思(2006/4)。同時，第二作者對於各種證明的看法，見蘇俊鴻(2006)。
12. 引自第二作者提供的學生回饋單之反思。
13. 同上。
14. 亦即：先是海龍，其次是梅文鼎，最後是現代教科書。
15. 限於篇幅，僅能呈現部分學生的評論。我們摘錄的標準是每種證法都挑出兩位同學當代表，不過B班中支持梅文鼎的只有一位，故兩班共選出十一位同學。
16. 第二作者經過實際教學後，對海龍與梅文鼎的證法之反思(2006/3/16)如下：「首先，海龍原始的証法與梅文鼎的証法開始的雷同，是可以想像的，因為透過幾何証明乘積的相等，當然是轉換成比例式的尋求，因此，造出$s=(s-a)+(s-b)+(s-c)$是可以想像的。而海龍使用圓內接四邊形對角互補的性質找到三角形的相似，是他整個証明最關鍵的一步，接著他充分運用了比例式的性質(合比、更比)，並且在最後一步，上下同乘造出s的平方時，他在比例式等號兩端所乘的數量是不同的。因此，他不像梅文鼎就必須使用兩次的相似才能克服。」
17. 引自第二作者的教學反思 (2006/4)。
18. 學生B4的評論，參見附錄一。
19. 引自第二作者的教學反思 (2006/4)。此外，第一作者也提出另一種猜測：梅文鼎的證明所用的性質雖然容易，但是技巧太難，是否是造成學生接受度過低的因素？(2006/5/21)
20. 引自Fauvel & van Maanen (2000, p. 298). 原文是 "The interpretation takes place in a circular process of forming hypotheses and checking them against the text given."
21. 有關「詮釋學循環」，請參考Jahnke (1994)。

22. 如果教師在數學教學過程中，沉溺在數學史的瑣碎細節而無法自拔，那麼，對於教學目標就很難自圓其說了。正因為如此，Freudenthal才會主張「引導式的再發明」(guided re-invention)：在數學教學時，「我們不應該遵循發明者的歷史足跡，而是經改良過同時有更好引導的歷史過程。」(Freudenthal, 1973, pp. 101, 103)

參考文獻

洪萬生(2004)。〈教改爭議聲中，證明所為何事？〉。《師大學報・科學教育類》，第49卷第1期，1–14。

洪萬生(2005)。〈PCK vs. HPM：以兩位高中數學教師為例〉。《數學教育會議文集》(頁72–82)。香港：香港教育學院數學系。

蘇俊鴻(2006)。〈海龍公式的各樣證法之特色〉。《HPM通訊》，第9卷第4期，35–40。

Berggren, J. L. (1990). Proof, pedagogy, and the practice of mathematics in medieval Islam. *Interchange, 21*(1), 36–48.

Fauvel, J., & Gray, J. (Eds.). (1987). *The history of mathematics: A reader*. London: The Open University.

Fauvel, J., & van Maanen, J. (Eds.). (2000). *History in mathematics education: The ICMI study*. Dordrecht, the Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Freudenthal, H. (1973). *Mathematics as an educational task*. Dordrecht, the Netherlands: D. Reidel Publishing.

Jahnke, H. N. (1994). The historical dimension of mathematical understanding: Objectifying the subjective. In *Proceedings of the 18th International Conference for the Psychology of Mathematics Education,* Vol. I. (pp. 139–156). Lisbon: University of Lisbon.

附錄一 「海龍公式的三種證法」回饋單及其整理

海龍公式的三種證法

_____班_____號___________（姓名）

1. 上述三種對於海龍公式的證明，請你分別給予簡短的評論：
 ①證法一（用餘弦定律）
 ②證法二（幾何）
 ③證法三（海龍原始的證法）

2. 對於這三種證法，你個人最喜歡的證法是那一種？請簡述理由。
 最喜歡的證法為：
 理由：

3. 進一步觀察，這三種證法，有著時間順序上的關係（由今到古），這樣的因素對於你去評論這三種證法，有無影響？請簡述原因。

4. 此外，對於這個教學活動，你個人有無其他的建議或是評論呢？

「海龍公式的三種證法」回饋單整理

編號	問題1 ①	問題1 ②	問題1 ③	問題2	問題3
A-1	非常簡捷，易懂，但流於機械運算，不用有靈感或直覺應該就寫得出來。	跟海龍證法不同之處，比較偏向角度與相似形的運用。	我個人覺得是幾何的集大成，要能靈活運用圓內接四邊形、內心、相似形以及母子相似性質。	考試時，我喜歡用餘弦定理，出錯率較低。但若是純粹為了數學練習，我會比較喜歡海龍的證法。畢竟越原始的數學方法好像常以簡單的數學方法來呈現，常有數學驚嘆之美，富有巧思。	多少會有影響，因為解題所運用的定理會不一樣。如果要看懂近代的數學證明，可能要再去翻一大堆已被證明的定理，後人通常會依著前人已鋪的康莊大道登頂，但我覺得走崎嶇的道路會有更多的驚奇。
A-2	簡明易懂，不需畫圖說明。	輔助線真是神來之筆，只用了相似形，比海龍易懂，但最後一個環節還沒有突破。	太神奇了，令人難以置信的是：從圖中得到的數字比例，還要再調整，才能再找到線索。	餘弦定理和近來所學的三角函數結合，證法顯明易懂，也讓我們了解餘弦定理的偉大。	有，因為時間的不同，背景也不同，工具的多寡也有差異。這讓我最佩服海龍的證法（西元一世紀），即使同樣為幾何證法的梅文鼎比較簡明，仍然不影響海龍的地位。
A-3	真是很方便的方法，感覺很神奇	呼～我喜歡的證明。	有點繁複，不容易想到。	證法②有一種很「紮實」的感覺。	無，我只是憑著感覺去想。
A-4	太工具了	還蠻有趣的。	頭暈，輔助線畫得很詭異，最神奇的是他不知道結果是什麼。	幾何還蠻有邏輯性的，不會太難（步驟），又很漂亮。	沒什麼影響，好證明就是好證明。
A-5	最「漂亮」！簡便快捷	能理解的年齡範圍廣。	最精采，也最繁複。	用海龍幾何證法來證明幾何面積，我最喜歡。	有，隨著三角函數、餘弦定理，能用的工具越來越多，證法越來越簡捷漂亮！
A-6	充滿代號，計算（證明）過程需十分小心謹慎。	輔助線很重要。	充滿許多神奇的關鍵點。	證法③運用很基本的運算及幾何知識即能證出。	前面兩個證法均需要發明者本身辛苦地一步步證出來；但到了後來，數學家能用的工具更多了，故可以其他方法證明。

B-1	簡單、方便、易學。	「感覺」比較平淡，可能因為沒證完吧!	「妙」，正常人不會想到。	證法①最easy，很快就懂了。	有吧！想想看……幾千年前的人想到我impossible想到的東西，如果這(海龍的證法)是現代人證出來的，可能「驚豔程度」就變低了吧。
B-2	正常！平易近人。		很漂亮。	餘弦定理的……(空白)，∵比起海龍平凡多了！	無影響，根本不去考慮「它」的時代。
B-3	很直接。	還蠻易懂的，只差直角……	太神奇了，一般人根本想不到。	證法②比較實際，且易懂，不會像③太神奇，感覺(思想)比較跳躍。	沒有，是對於證法本身評論，不會管它的年代。
B-4	很簡潔、易懂。		很漂亮，根本不可能想得到。	海龍原始的證法很特別，我覺得那是需要集結大量的經驗，再加上突來的運氣，才能夠想出這麼漂亮的證法。	有，就是因為海龍當時無法任意使用餘弦定理，才能有如此漂亮的證明。相較於餘弦定理的方法，雖然快且易懂，但缺少了理解證明三(海龍的證明)時的樂趣。
B-5	雖然過程有些暴力，但這是每個人都想得到的方法。	將$(s-c)$移到$\overline{AB}$的方法是個不錯的想法，表示出了幾何上的意義。	It's beyond description! 從那張圖中似乎可以有很多發現。	海龍原始的證法輔助線和線段的替代過程給人一種疑惑而又恍然大悟的驚喜。	隨著時代的發展，數學公式發現的漸多，因而可以用代數的方法作運算。而以前的人受限於工具的不足，因此使用幾何。

How to Teach Heron's Formula? An HPM Episode

Wann-Sheng HORNG and Jim-Hong SU

Abstract

The second author here, Mr. Su, used two to three class hours to introduce three proofs of Heron's Formula to two classes of tenth graders (30 students in each class): (1) the proof in modern textbooks using the law of cosine, (2) the proof by early Qing Dynasty mathematician Mei Wending, (3) the proof by Heron himself. He then asked his students to complete a feedback questionnaire, and a total of 50 questionnaires were returned. Based on this teaching episode, this article explains the possible influences of teaching activities integrated with HPM. We found that under the guidance of HPM, it is possible for the teacher or the students to have a certain level of "liberation" in the knowledge content of the textbook, to "untie" or "overthrow" the more "conventional" aspects of the textbook. This teaching episode of Heron's Formula illustrates that.

洪萬生，台灣師範大學數學系教授。
蘇俊鴻，台灣師範大學數學系博士生，主修數學教育；任教於台北市立第一女子中學。

聯絡電郵：sujh@fg.tp.edu.tw