

利用學習軌道理論進行 國小柱體與錐體概念教學之行動研究

陳嘉皇*

國立臺中教育大學數學教育學系

本研究針對台灣現行兩版本的國小數學教科書，分析探討當中柱體與錐體的相關單元內容；利用學習軌道設計課程，編製教學活動進行教學實驗，檢視兩位不同學習層次學生的學習情形及其解題表現，了解學生在學習歷程中的解題策略及可能的迷思概念；透過教師課後的省思日誌進行教學檢討，以提升教學效能，幫助學生建立完整具系統性的柱體與錐體概念，期望在解決這類題目時有更完備的思維，擁有正確解題的能力。

關鍵詞：學習軌道；柱體與錐體；教科書；課程

緒論

不同個體有高低能力的差異，要協助他們在學業上有所成，身為教師，必須考量學生的先備能力，並調整課程活動的設計和教學方式。假如學生過去的數學概念尚未建立完全，對未來的學習將會造成影響，更甚者會因為學習挫折，導致喪失學習意願。教師如何使用適切的教學方法提供學生良好的學習歷程，並透過審視初始概念所設定的教學目標適時檢視學習狀況，皆會影響學生學習的成效。所以，從課程設計中的教學目標以至教師使用的教學策略，都不容小覷。

台灣近幾次的 PISA 施測結果與歐美國家相較，雖然表現優異，但學生之間的數學成就表現落差大，尤其在「空間與形狀」的表現上並不佳，這是教師教學時值得關注的。小學階段「空間與形狀」的奠基很重要，柱體與錐體的學習是高年級中重要的一環，皆出現於「幾何」的能力指標中。在這樣的能力指標設定下，學生必須由易而難，先能辨別圖形，其次了解幾何形體的構成要素，再透過操作和觀察學習柱體展開圖和透視圖，進而建構完整的柱體與錐體形體概念。幾何概念的建立，視圖轉換成立體

* 通訊作者：陳嘉皇（chench1109@mail.ntcu.edu.tw）。

形體是較困難的；本研究將透過實體操作，連結學生視圖至立體形體的概念，於課程中以討論教學法，釐清學生學習的迷思概念，使學生能將實體與課本平面圖結合，以期協助他們有效學習。

幾何教學強調的是實物的操作和觀察，但在台灣的教學研究實務上，關於數學教學活動或課程設計，利用系統化的方式進行科學研究仍舊缺乏（陳嘉皇，2008）。Simon（1995）提出假設性學習軌道（hypothetical learning trajectory）理論。應用於數學課程發展與設計，此理論推測學生可能的學習路徑，並由這樣的路徑組織教學歷程；教師透過教學和省思，發現學生學習概念與原軌道設計的相符程度，進而修正其學習軌道，以利未來課程設計的安排。學習軌道會因學生的個別差異而不同，故此教師應提升自我專業能力，使教學前能清楚了解教學歷程，透過課後省思及修正，以提升學生的學習成效（陳嘉皇，2008，2017；陳嘉皇、詹晏瑜，2018）。

上述研究均提及教師必須注意學生的個別差異，重新審視課程的設計和教學實施的歷程，並透過系統化的方式評估學生的學習歷程，調整教學策略。本研究主要目的在於利用「學習軌道」理論設計國小六年級柱體與錐體概念發展的教學活動，檢視學生課堂學習的情形及數學表現。透過設立教學目標、安排作業和課堂師生互動，觀察學習柱體與錐體概念的思考和迷思概念，即時掌握學生學習狀況和數學概念發展，進而調整及省思教學內容，期許在教學上能給予學生最好的幫助，以達到學習的最大效能。本研究探討的問題如下：

1. 透過學習軌道教學實驗，學生在柱體與錐體形體辨別的概念表現為何？
2. 學生在柱體與錐體特性及命名活動的概念表現為何？
3. 學生在柱體與錐體構成要素活動的表現為何？
4. 學生對柱體與錐體展開圖和透視圖活動的表現為何？

文獻探討

學習軌道的定義與內涵

學習軌道（learning trajectories）源於「真實數學教育」（realistic mathematics education）使用的一種預想性課程實驗設計，學生從學習的起點朝學習目標進展，是學習過程必須處理的路徑。教師按學生在數學概念學習的可能路徑及其先備知識來推測，並依此路徑於課前設計教學活動，以支持和組織學生的身心發展和學習概念，稱之為「學習軌道」（Simon, 1995）。美國國家研究委員會（National Research Council）針對學習的研究，以學生的發展和學習軌道形成基礎，思考連續性的數學議題，得出教師的教學是支持學生從軌道中移動的重要歷程（Corcoran, Mosher, & Rogat, 2009）。

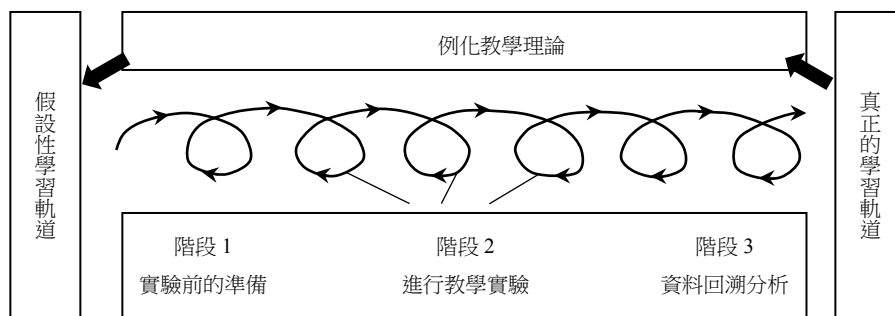
學習軌道描述學習必須處理的路徑，以及配合課程設計的實施方式，提供師生、家長評估學習進展、確認和報告學習成果的共同參照架構，從個別開始的起點朝學習目標進展，推測學生在數學重要的理念或特殊的意義目標可能的學習路徑，以此路徑編排教學活動，組織學生的概念知識，透過啟發式教學的步驟進行。

Wilson, Sztajn, Edgington, & Myers (2015) 認為教室的環境需以學生為中心，透過學生的思考來引導教學的重點，教師才能確實掌握學生的知覺，理解學生從非正式到正式發展的路徑，並依據這個歷程設計教學活動和組織教學，增加學生的成就表現，提升教師的專業學習。教學前透過教師對專業科目的理解，連結對教學與學習假設的思考，注意學生的先備知識，引導學生的概念學習，將會改變教師對學生的數學、信念及教學實務的相關知識。Simon & Tzur (2004) 提出學習軌道可廣泛應用於數學研究和實際教學中，同時認為學習的歷程是一項重要的因素，提出學習軌道使用的原則：

1. 學習軌道的產生是基於對學生現有知識的理解；
2. 它是針對特定數學概念規劃學習的一種方法；
3. 為促進特定數學概念的學習，訂定的教學任務和過程是關鍵的部分；
4. 學習軌道具不確定性，教師須定期參與教學和修改軌道內容或活動順序。

Gravemeijer (1999, 2004) 認為學習軌道包含三個重點：首先，實驗前的準備須建立在學生現有的數學知識上；其次，思考如何在數學教學的活動中制定學生可理解和參與的任務；最後，教師進行資料回溯分析，修訂學習軌道並定案。從激進建構學習的角度，研究者須先假定學習軌道的組成，構想和設計任務，以建構學習軌道的歷程（如圖一）。

圖一：執行學習軌道的歷程



資料來源：參考 Gravemeijer (2004)。

Wilson, Sztajn, Edgington, & Confrey (2014) 認為，教師的學習軌道知識同時受數學教學知識 (mathematical knowledge for teaching) 中的學科知識 (subject matter knowledge) 和教學內容知識 (pedagogical content knowledge) 影響，學習軌道須連結學生的思考方式，重新詮釋學科知識和教學內容知識的關係；再者，教師可透過數學教學知識裏的教學內容知識，解釋學生對所欲學習之數學知識的思考歷程。學習軌道支持教師預測學生可能的思考及面對特定數學任務時的反應：教師須傾聽和詮釋學生的思考模式，協助學生理解數學概念並釐清迷思；學生從不會到學會思考的歷程中，亦會發現迷思概念。Wilson, Sztajn, Edgington, & Myers (2015) 主張教師可從教學經驗和省思教學的實務中，理解學生展現的數學知識及技能，在教學和檢驗學習軌道時，因應教學內容及學生的學習表現而重新組織編排學習軌道，結合學生的邏輯發展和學科的教學順序，設計最適合的課程，使學生在豐富的內容情境下討論學習，達成任務目標以提升個體的學習表現。

Clements & Sarama (2004) 認為，學習軌道包含數學目標、學生學習和發展的進程，以及符合這些進展的活動；又認為教學目標和發展之間的關係為「跨越幾個重要的數學性質，逐漸趨向聰慧、複雜、抽象和歸納出不同結構層次的歷程」(p. 83)。設計作業並排列次序，是用來支持學生理解在發展進程中的某一概念層次或目標。Clements & Sarama 區分特殊的心智結構和推理樣式，用以說明學生在每個進展層次上的思考，並發展出數字、計數、等價關係、加減法和空間推理等相關的學習軌道。Confrey, Maloney, Nguyen, Wilson, & Mojica (2008) 認為，學習軌道是研究者對連續的表徵精煉、省思、釐清，進而臆測及作實證支持，建構起學生在面對教學時的順序網絡。學習軌道植基於相信個體的理解是以前經驗的某種排序和組織為學習基礎，透過教學者從較不聰慧的理解轉移至較聰慧的理解，塑造意義，建構出學習者的學習歷程。因此，學習軌道包括調整標準建構課程的順序、形成性評量和教師的引導，同時尊重並運用學生的經驗為教學的來源，參考數學邏輯和數學概念的認知發展，以作設計軌道的依據。

陳嘉皇 (2008) 利用學習軌道理論，分別應用在圖形與面積概念發展，以及國小面積資訊教材學習軌道設計與教學，依照學生發展歷程設計學習軌道，研究結果具有顯著差異，表示結合學生發展順序和教師教學經驗，利用學習軌道理論安排和選擇教室課程設計，非常適合學生的學習，在學習表現上亦有明顯成效。另外，陳嘉皇、吳碧智 (2016) 針對圓形複合圖形面積計算單元，以學習軌道理論設計教學課程內容，編製相關學習單，以教學實驗方式進行研究，了解在學習軌道的課程設計中不同學業表現的學生在圓形複合圖形的學習表現。結果發現，學習軌道理論可用於設計圓形複合圖形面積教材，針對不同程度的學生亦有不同表現；在教學實驗後省思，進一步修正計算圓形複合圖形面積的學習軌道，提升教學成效，建立完善的概念學習。

柱體與錐體概念之教學研究

學習軌道是對數學概念由淺到深的理解，對認知發展具有關聯性和可預測性。參考過去的研究報告，教學者過往的教學經驗和教科書的編製，都可預測學生可能的學習狀況，為學生提供合理且符合概念性的學習路徑，穩固學生學習數學的概念。教師在教學前對數學概念應有完整了解，明白教學對象的能力，並能重新審視教科書的教學流程，從而設計教學流程。在教學過程中，透過課程的問答、學習單的練習、實務操作等，時時檢視學生的學習狀況和教學流程是否合理，針對課後學生的訪問調查和教師的教學省思，調整課程教學順序和內容，修正學習軌道，以期符合學習目標，並提升學生的學習成效。因此，教師執行學習軌道前的教學準備，須對柱體與錐體的教材內容和學生學習的概念發展有充分認識。

朱建正（1998）認為一般人對立體幾何的知識不多，其中原因在於小學教科書中有關立體幾何的教材不多，故針對國小立體圖形的教材課程進行分析，建議教學流程應以生活經驗帶入模仿練習，進而提出反例，再帶出定義，利用純數學的觀點描述邊與面的垂直、平行，將柱體與錐體的定義及概念整理得更加清楚和完善；認為高年級學生學習立體幾何的認知狀態，可透過教學及評量作日後改進教材的基礎。沈佑霖（2003）提及學生對立體圖形堆疊結構缺乏正確認知，二維平面圖形不一定能和物體立體化結合，只能藉由猜測來解釋圖形的結構，在學習上易產生迷思概念；建議學生在初期學習應多給予具體操作，藉由視覺、觸覺去感受物體存在的性質和形體樣貌，以發展空間視覺化。由此可知，對學生而言，將立體物件轉換成二維圖像的過程中，是學生容易產生迷思及混淆的部分，兩者之間的轉化是空間思考需培養的能力。

Koester（2003）研究二維和三維幾何，發現國小高年級教材較常強調平面幾何圖形，立體形體所佔比例較少。Koester 給三至五年級學生利用紙和吸管，製作角柱與角錐的模型，建立其三維立體形體概念；課程的設計能夠引發學生的學習興趣，課後學生樂於分享彼此的模型，並使用上課時所使用的新詞彙和新概念。從學生製作形體的過程，依據觀察和發現，進而對形體的描述和分類更加清楚；透過實際操作的學習過程，使學生對所學概念留下深刻印象。

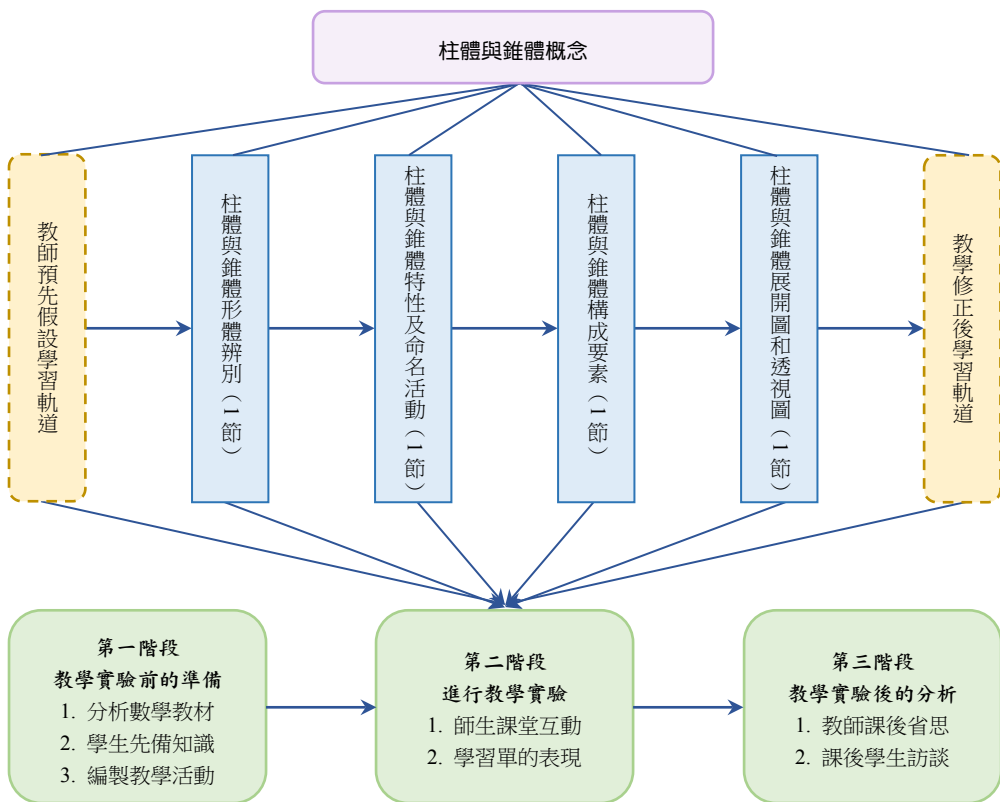
透過「柱體與錐體」教材的分析，發現台灣現行的教科書中，柱體與錐體是以柱體表面積的前置概念來設計，在四、五年級已發展正方體和長方體的認識，六年級則增加角柱與角錐種類，並加入了圓柱與圓錐，結合構成要素和展開圖的概念，銜接柱體表面積的理解，顯現這單元在概念學習的重要性。在台灣，主要研究偏重於二維展開圖到三維立體形體的轉換，並運用其性質進行表面積與體積的解題，其中缺少「柱體與錐體」概念教學的歷程和教材的評估。從上述文獻發現，在柱體與錐體概念的學習，若能提供學生動手操作的機會，利用具體實物觀察，發現其特性與構成要素間的關係，這樣的學習成效會優於紙本的講述式學習，亦能提升學生學習的興趣。

鑑此，本研究以討論式教學為主，拉近師生的關係，提供學生觀察實物的經驗，透過動手操作，令學生能更有效建立數學概念，幫助提升數學能力。

研究方法與步驟

本研究架構如圖二所示，研究設計分成教學實驗前的準備階段、教學實驗階段和實驗後的分析階段。為達成學生建立柱體與錐體概念的有效學習，針對研究對象、課程設計及實施、資料蒐集及處理，作進一步探討和說明。教學準備的前置作業首先針對現行教科書，分析柱體與錐體單元的內容，了解教科書的安排，再評估教學順序，同時將柱體與錐體的數學概念做整體串聯，以利達成教學目標。學生學習的路徑因學習背景、個人特質等各有不同，經與專家晤談和過去教學經驗，綜合不同路徑的優缺點，建構出一條最適合教學班級的學習路徑，並進行課程教學。

圖二：本研究架構——學習軌道融入國小柱體與錐體概念教學



教材內容分析

九年一貫柱體與錐體之概念發展分年細目分析

教育部（2008）頒布《國民中小學九年一貫課程綱要》的數學領域課程中，柱體與錐體概念發展屬幾何的範疇，對於學生數學形體概念的發展有着深厚的影響；在九年一貫課程中，柱體與錐體的概念是許多能力的前置概念，佔有重要地位。以下列出「幾何」主題中跟柱體與錐體概念發展相關的能力指標（見表一）。

表一：2008年九年一貫課程正式綱要中「幾何」主題跟柱體與錐體概念的相關分年細目

年級	編號	分年細目
五	5-s-03	能認識圓心角，並認識扇形。
	5-s-06	能認識球、直圓柱、直圓錐、直角柱與正角錐。
六	6-s-01	能利用幾何形體的性質解決簡單的幾何問題。
	6-s-04	能認識面與面的平行與垂直，線與面的垂直，並描述正方體與長方體中面與面、線與面的關係。

資料來源：教育部（2008）。

從表中可發現，國小階段柱體與錐體的相關能力在五、六年級是學習重點之一，透過柱體與錐體的形體辨別，利用展開圖和透視圖了解柱體與錐體的底面及側面，結合過去的學習經驗，進而發展至柱體與錐體的解題應用。根據能力指標整理，發現五、六年級才正式接觸到立體形體，以及以展開圖和透視圖為柱體與錐體計算的銜接概念，而在國中教材中，則偏向直接呈現柱體形體，要求學生進行表面積解題。這是國小課程與國中課程的差異。

○○版及△△版教材分析

表二整理台灣國小數學市佔率較高的兩個版本教材的柱體與錐體單元。

表二：國小兩版本教材柱體與錐體相關單元及子單元

冊別/ 單元名稱	○○版六上/ 九、柱體與錐體	△△版六上/ 三、柱體與錐體
子單元一	分分看	柱體與錐體的分類
子單元二	角柱的構成要素	柱體與錐體的特性及命名
子單元三	角柱的表面積	柱體與錐體的透視圖和展開圖
子單元四	圓柱的構成要素	角柱與角錐的組成要素及關係
子單元五	圓柱的表面積	
子單元六	角錐的構成要素	
子單元七	圓錐的構成要素	

一、○○版柱體與錐體教材內容介紹

○○版的柱體與錐體教學編纂於六上柱體與錐體的單元中，從柱體與錐體的形體比較、分類為開端，導入柱體的構成要素及其展開圖，進入柱體表面積的計算，再到圓柱構成要素及表面積計算，最後才教錐體的構成要素。表三是○○版柱體與錐體概念的教材分析及建議修改方向。

表三：○○版柱體與錐體概念的教材分析

○○版課本內容	可修改方向
<p>【分分看】 直接將柱體與錐體分類。</p> 	<p>應配合教具，使學生發現柱體與錐體的差異，進而自行分類，以便有更具體的形體概念。</p>
<p>【角柱的構成要素】 柱體與錐體構成要素的部分是分開的，從構成要素帶出面的平行與垂直，再帶入角柱展開圖的概念。</p> 	<p>這部分可以只介紹構成要素，對角柱與角錐進行比較，使學生在構成要素的概念較為完整，亦能透過形體的觀察、比較，更清楚了解柱體與錐體底面與側面的關係。</p>
<p>【角柱的構成要素】 課程安排透過操作觀察角柱展開圖。</p> 	<ol style="list-style-type: none"> 1. 只用一題例題及一題練習題就引導出角柱側面面積為長方形概念，研究者認為這部分是不足的。 2. 提問方式應改變為以下： <ul style="list-style-type: none"> • 展開圖中，哪些是原來三角柱的底面？ • 展開圖中，哪些是原來三角柱的側面？ • ㄅ面和ㄆ面的周長，和三角柱的哪一部分線段一樣長？ • 在角柱中，那些邊互相垂直？那些面互相垂直？

表三：○○版柱體與錐體概念的教材分析（續）

○○版課本內容	可修改方向
<p>【圓柱的構成要素】</p> <p>課本上直接呈現圓柱的構成要素，並未讓學生探究，再以提問方式讓學生了解圓柱的構成要素。</p> <p>四 圓柱的構成要素</p> <p>拿出附件第 19 頁中做好的圓柱。</p>  <p>1 圓柱的底面是什麼形？有幾個底面？</p> <p>2 底面互相平行嗎？是否全等？</p> <p>3 圓柱和角柱有哪些不同的地方？</p>	<ol style="list-style-type: none"> 1. 這部分可以用填空方式令學生依照過去經驗，填入圓柱的構成要素。 2. 提問方式應改變為以下： <ul style="list-style-type: none"> • 展開圖中，哪些是原來圓柱的底面？ • 展開圖中，哪些是原來圓柱的側面？ • 觀察圓柱的側面和上下底面，哪一部分的線段一樣長？
<p>【角錐的構成要素】</p> <p>在本教科書提問上，回答「是」的答對機率過高，易產生尚未看完問題，就直接回答的情況。</p> <p>拿出附件第 21 頁中做好的四角錐紙盒，沿著邊剪開攤平後，在每個面上做記號，如下圖：</p>  <p>觀察上圖，回答下面問題：</p> <ol style="list-style-type: none"> 1 展開圖中，側面是原來四角錐的側面嗎？ 2 展開圖中，底面是原來四角錐的底面嗎？ 3 底面的周長和哪些線段合起來一樣長？ 4 四角錐中有互相垂直的邊嗎？有互相垂直的面嗎？ 	<ol style="list-style-type: none"> 1. 提問方式應改變為以下： <ul style="list-style-type: none"> • 展開圖中，哪些是原來四角錐的底面？ • 展開圖中，哪些是原來四角錐的側面？ • 側面的周長，和四角錐的哪一部分線段一樣長？ • 角錐的側面和底面有互相垂直嗎？角錐中的邊有互相垂直嗎？
<p>【圓錐的構成要素】</p> <p>只單純說明圓錐的構成要素。</p> <p>七 圓錐的構成要素</p> <p>拿出附件第 25 頁中做好的圓錐。</p>  <p>1 圓錐有幾個底面？圓錐有幾個頂點？</p> <p>2 圓錐和角錐有哪些相同的地方？有哪些不同的地方？</p> <p>圓錐的底面是圓形，圓錐的側面展開後是扇形。</p>	<p>在圓柱與圓錐的教學中，類似概念放在同一個子節教學，與圓柱構成要素直接比較，在這樣的情況下，較能夠有明顯的不同。</p>

註：本表左欄中的圖文內容取自南一書局企業股份有限公司 2015 學年國小六年級數學教科書，蒙該公司授權轉載。

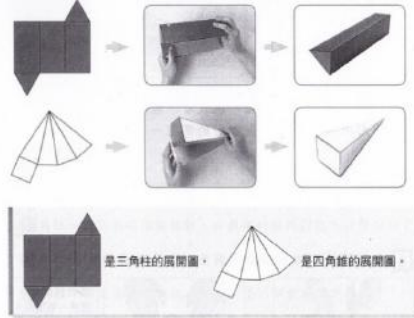
二、 \triangle 版柱體與錐體教材內容介紹

\triangle 版先針對柱體與錐體的構成要素及其相關概念編於第十一冊第三單元，先進行柱體與錐體的分類到特性及命名，再認識透視圖和展開圖，進而分析角柱與角錐的組成要素及其關係。表四是 \triangle 版柱體與錐體概念的教材分析及建議修改方向。

表四： \triangle 版柱體與錐體概念的教材分析

△△版課本內容	可修改方向
<p>【柱體與錐體的特性及命名】 這部分主要透過柱體觀察兩底面互相平行，及側面和底面互相垂直。</p> <p>2 觀察每個角柱說說看。〈配合附件三〉</p> <p>1 它們的兩個底面是不是都互相平行？</p>  <p>2 它們的側面和底面是不是都互相垂直？</p> <p>因為側面乙的AG，同時和底面甲的AF和AB垂直，所以側面乙和底面甲互相垂直。</p>	<p>1. 可以透過問題「有哪些面互相平行、垂直？」，進而歸納兩底面互相平行，及側面和底面互相垂直的概念。</p> <p>2. 這部分亦可用問題引導邊與邊之間的關係。</p>
<p>【柱體與錐體的透視圖和展開圖】 這部分使用頂點珠和造型棒製作角柱與角錐的骨架。</p> <p>2 用頂點珠和造型棒，做出各種角柱和角錐的骨架。數數看，需要幾個頂點珠和幾根造型棒？</p> 	<p>這個活動或許更適合用在角柱與角錐的組成要素及關係，因為更能清楚看見頂點、邊、面的個數。</p>

表四：△△版柱體與錐體概念的教材分析（續）

△△版課本內容	可修改方向																									
<p>【柱體與錐體的透視圖和展開圖】</p> <p>這部分其中一個活動是拿出附件展開圖，猜猜看能做成哪些形體。</p> <p>3 拿出附件的展開圖，猜猜看，它們可以做成哪些形體？ 實際動手做做看，你猜對了嗎？（配合附件四）</p>  <p>是三角柱的展開圖， 是四角錐的展開圖。</p>	<p>這部分因為附件的展開圖都有方便學生組裝教具的黏貼處，容易造成學生認知的混淆。可以先將附件製作成立體形體後，再用剪刀沿着邊剪開，從中能得到更精確的展開圖。</p>																									
<p>【角柱與角錐的組成要素及關係】</p> <p>這部分的課程編排，是先教柱體與錐體的透視圖和展開圖，再進入組成要素及關係。</p> <p>活動四 角柱和角錐的組成要素及關係 ◆配合附件28</p> <p>1 觀察做好的角柱，完成下表。（配合附件三）</p> <table border="1" data-bbox="234 987 632 1166"> <thead> <tr> <th>項目 \ 形體</th> <th>三角柱</th> <th>四角柱</th> <th>五角柱</th> <th>六角柱</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>底面形狀</td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> </tr> <tr> <td>頂點個數</td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> </tr> <tr> <td>面的個數</td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> </tr> <tr> <td>邊的個數</td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> </tr> </tbody> </table> <p>觀察上表想想看。</p> <p>1 角柱一個底面的頂點個數，和角柱的頂點個數有什麼關係？</p> <p>2 角柱一個底面邊的個數，和角柱面的個數有什麼關係？</p> <p>3 角柱一個底面邊的個數，和角柱邊的個數有什麼關係？</p>	項目 \ 形體	三角柱	四角柱	五角柱	六角柱	底面形狀					頂點個數					面的個數					邊的個數					<ol style="list-style-type: none"> 1. 可帶入用頂點珠和造型棒製作角柱與角錐的骨架，更能清楚看到角柱與角錐的頂點及邊的關係。 2. 若能在學生明白角柱與角錐的組成要素及關係後，再教透視圖和展開圖，一方面在展開圖時，能執行教具的使用；另一方面在教學上，學生已有面個數的概念，更能夠銜接。
項目 \ 形體	三角柱	四角柱	五角柱	六角柱																						
底面形狀																										
頂點個數																										
面的個數																										
邊的個數																										

註：本表左欄中的圖文內容取自康軒文教事業股份有限公司國小六年級數學教科書，蒙該公司授權轉載。

教材分析與軌道安排

課程內容設計方式

課程內容以教育部 2008 年九年一貫正式課程綱要六年級數學科柱體與錐體概念為主，參考國小現行數學科課本教材及教學指引，自行設計教學內容，並將該節課裏欲教授給學生的數學概念轉成學習單，以討論式教學為主，激發學生的思考，逐步建構數學知識與概念。

課程內容設計

作者針對○○版及△△版教材進行分析後，利用學習軌道設計柱體與錐體的課程內容，包含學習目標、教學任務，並臆測學生可能的反應（見表五）。

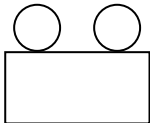
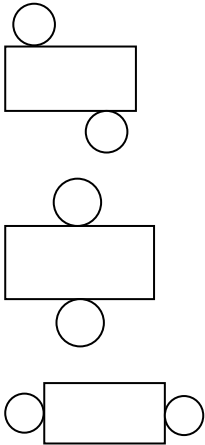
表五：課程設計的目標、說明及臆測學生可能的反應

學習軌道	目標	任務說明	臆測學生可能的反應
軌道活動一 柱體與錐體形體辨別	1. 能辨別柱體與錐體，並指出其差異及特徵。	1.1 能依照形體將圖形對應編號貼上標籤。 1.2 能將形體進行有邏輯性的分類，並說明理由，以及其特徵和差異。	1.2.1 學生可能的回答： <ul style="list-style-type: none"> 柱體與錐體二分法：分成一類像柱子一樣直直的，另一類是上面尖尖的。 側面是長方形、三角形及其他三分法：側面是長方形的一類，側面是三角形的一類，剩下的是沒被分到，總共三類。 角柱、角錐、圓柱、圓錐四分法：側面是長方形的一類，側面是三角形的一類，還有圓柱的一類和圓錐的一類，總共四類。
軌道活動二 柱體與錐體的特性及命名	1. 能依照柱體與錐體的性質命名。 2. 能觀察柱體與錐體的差異。	1.1 能依照底面圖形命名。 2.1 能比較柱體與錐體特性的差異。	1.1.1 學生可能的回答： <ul style="list-style-type: none"> 以邊命名：三邊柱、四邊柱、五邊柱、六邊柱、圓柱、三邊錐、四邊錐、五邊錐、六邊錐、圓錐。 以面命名：五面柱、六面柱、七面柱、八面柱、三面柱、四面錐、五面錐、六面錐、七面錐、二面錐。 以角命名：三角柱、四角柱、五角柱、六角柱、圓柱、三角錐、四角錐、五角錐、六角錐、圓錐。
軌道活動三 柱體與錐體構成要素	1. 能依照形體算出其頂點、邊、面的個數。	1.1 能說出角柱與角錐的構成要素。	

表五：課程設計的目標、說明及臆測學生可能的反應（續）

學習軌道	目標	任務說明	臆測學生可能的反應
	2. 能根據觀察，說出頂點、邊、面與形體間的關係。	<p>2.1 透過觀察能說出角柱底面互相平行且全等，底面和側面互相垂直，角柱側面為長方形。</p> <p>2.2 完成柱體構成要素頂點、邊、面的表格。</p> <p>2.3 能觀察並說出角柱側面個數、邊的個數、頂點個數和底面邊數的關係。</p> <p>2.4 透過觀察發現角錐有一個底面，底面和側面不互相垂直，角柱側面為三角形。</p> <p>2.5 能完成錐體構成要素頂點、邊、面的表格。</p> <p>2.6 能觀察並說出角錐側面個數、邊的個數、頂點個數和底面邊數的關係。</p>	<p>2.3.1 學生可能的回答：</p> <ul style="list-style-type: none"> • 觀察表格法：面的個數是底面邊數加二；邊的個數是底面邊數的三倍；頂點個數是底面邊數的兩倍。 • 實際觀察法：面的各數是底面邊數（側面）加上兩個底面；邊的個數是底面邊數的三倍（兩底面加上側面）；頂點個數是底面邊數的兩倍（上下底面）。 <p>2.6.1 學生可能的回答：</p> <ul style="list-style-type: none"> • 觀察表格法：面的個數是底面邊數加一；邊的個數是底面邊數的兩倍；頂點個數是底面邊數加一。 • 實際觀察法：面的個數是底面邊數（側面）加上一個底面；邊的個數是底面邊數的二倍（一底面加上側面）；頂點個數是底面邊數加一。

表五：課程設計的目標、說明及臆測學生可能的反應（再續）

學習軌道	目標	任務說明	臆測學生可能的反應
軌道活動四 柱體與錐體展 開圖和透視圖	1. 能運用教具製作柱體與錐體的骨架圖。	1.1 能說出立體形體的構成要素，利用頂點、造型棒製作立體形體的骨架圖。	
	2. 能透過附件拆解、組合，指出相對應形體的展開圖。	2.1 能透過拆解附件，畫出圓柱的展開圖。	2.1.1 學生可能的回答： <ul style="list-style-type: none"> • 同側展開法：  • 雙側展開法： 
	3. 能對照柱體與錐體的透視圖和展開圖。	3.1 能進行二維透視圖與立體形體的對照。 3.2 能透過附件對照，指出角柱與角錐的展開圖，並能和同儕分享討論。	

學生特質說明

共有 24 名（男生和女生各 12 位）學生參與本教學研究。活動以 2 至 3 人一組互相討論，個別完成學習單，並派代表發表做法或想法；分組方式盡量以異質分組。分析的樣本依認知能力和數學成績表現分為低、中、高，從低分組和高分組中各挑選

出一位學生（A 和 B）為研究對象。低分組 A 生的數學學習和理解能力不佳，上學期末數學評量成績在班級中為後 30% 的學生；高分組 B 生則是數學學習和理解能力優良，且數學評量成績在班級中屬於前 30% 的學生。透過對這兩位學生在小組互動及班級討論過程的觀察、小組合作學習、學習單練習、課後訪談等資料，以作本研究分析探討的依據。

資料蒐集與分析

為詳實記錄教學活動中學生的作答情形、學習狀況和師生互動情形，採取「教學觀察與攝影記錄」的方式，為教師事後回顧教學內容時，可有真實的資料參考，並注意學生的回答和反應，以驗證課程設計的內容是否符合學生的學習軌道及預期的教學目標。分析項目如下：

1. 學生課程學習單的作答情形——透過行間巡視記錄及學習單的練習，分析學生作答的概念類型和解題技巧。在教學活動的過程中，搭配學習單設計的問題，要求學生記錄自己的解題過程，並在課堂中完成，以作研究資料分析之用。
2. 資料處理方式——藉由觀察學生作答時的數學概念，從中分析其錯誤類型及相關迷思概念。學生作答錯誤類型有四：（i）分類概念錯誤，例如尚未建立完整分類形體的概念；（ii）形體概念錯誤，例如未有判別形體特性的能力；（iii）構成要素推論錯誤，例如無法找出構成要素頂點、邊、面的個數與底面圖形的關係；（iv）空間概念錯誤，例如尚未建立三維形體轉換成二維平面的概念。
3. 師生之間的課堂對話——將攝影記錄轉譯成文字稿，摘錄課堂中師生重要問答，以及釐清學生迷思概念的相關問答和討論，以英文字母「t」代表教師、「s」代表學生進行編碼。
4. 教師的自我省思——教師在每堂課程結束後填寫教學省思日誌，將課堂上與學生互動的情形、學生的學習情況確實記錄，並檢視教學內容是否達到本堂的教學目標。透過填寫省思日誌，亦能自行檢視教學過程作適當調整，並修正最初「學習軌道」的課程設計。

研究結果與討論

為觀察學生教學前、後的差異，設計柱體與錐體概念測驗試卷並於教學前、後進行團體施測，針對學生前、後測成績進行比較分析，結果如表六所示。

表六：柱體與錐體概念之教學前、後測表現的描述性統計及 t 檢定

變項	教學前測		教學後測		t	p	95% 信賴區間	
	M	SD	M	SD			下限	上限
成績	67.63	16.76	95.33	3.10	7.815***	.000	20.374	35.043

*** $p < .001$

由表六得知參與教學實驗的 24 位學生在教學前測的平均分數為 67.63，標準差為 16.76；教學後測的平均分數為 95.33，標準差為 3.10。從平均數來看，柱體與錐體概念的教學後測成績表現明顯高於教學前測成績，且學生彼此差異縮小。就整體考驗而言， t 值達顯著水準 ($p < .001$)，顯示柱體與錐體概念的教學後測成績與教學前測成績有顯著差異，表示學生經教學後，柱體與錐體概念能力有所提升。茲從 A、B 兩位學生於教學互動、作業表現的資料中摘錄重點加以說明。

A 學生的學習表現

形體定義概念

形體概念在這單元是建立的基礎，從分類概念過渡到形體的命名及特性，才能有之後的構成要素概念及解題應用概念，這部分學生很難在第一時間有周全的思考。教師先透過小組討論，再進行全班集思廣益，以達到建立柱體與錐體命名及特性的概念：先透過學生觀察，再由教師引導教學，建立學生對立體形體的命名及基本概念。A 生課堂師生對話及學習單的表現如圖三。

t: 你看看這些側面，有發現甚麼嗎？

sA: 喔，側面都是三角形。

t: 對呀，很棒！你有觀察到了，接下來再找找看還有甚麼吧！

sA: [後來寫了最上方有一個頂點]

[在全班討論後，sA 最後補上一個頂面，但在黑板上寫的是一個底面]

圖三：sA 作答表現-1

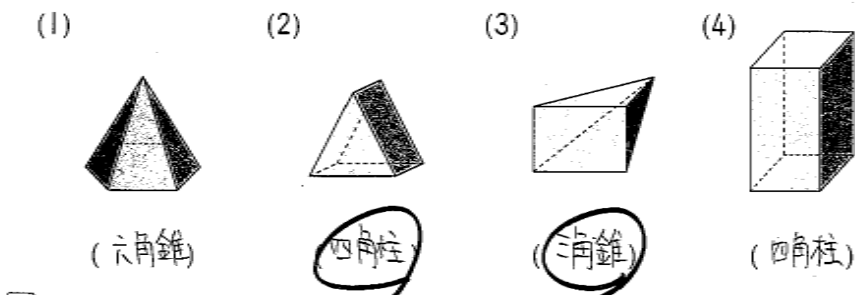
四、依據角錐的特性，觀察角柱與角錐，有哪裡不一樣？

1. 側面都是三角形
2. 最上方有一個頂點
3. 三個頂面

形體定義概念主要包含形體的命名、柱體與錐體的基本定義，以及基本要素的認識，這些都是在學習這單元中的重要基礎。尤其在開始學習命名時，學生容易因擺放位置而被混淆，這是三維形體對二維平面的概念錯誤。以下是 A 生作業作答情形（見圖四），訪談中了解到其思考及解決學習迷思的歷程。

圖四：sA 作答表現-2

2 寫出下列各形體的名稱。



- t: [桌上擺上教具錐體] 你可以先幫老師找出最像第三個圖的形體嗎?
- sA: [比了拿了三角錐後又拿起四角錐，指着四角錐] 是這個。
- t: 你怎麼知道是這個?
- sA: 因為它躺着放就跟這個一樣。
- t: 你可以告訴老師，今天上課學過，角錐是以誰來命名。
- sA: 底面。
- t: 很好，那角錐的底面有幾個。
- sA: 一個。
- t: 第三個圖形的底面在哪裏?
- sA: [指出四邊形的地方]
- t: 沒錯，我們是從這邊才知道它是四角錐。那接下來我們來看第二個圖形。這是柱體還是錐體。
- sA: 柱體。
- t: 為甚麼?
- sA: 因為平平的，沒有尖尖的一頂點。
- t: 那老師問問你，角柱有幾個底面?
- sA: 兩個。
- t: 那側面都是甚麼形狀?
- sA: 長方形。
- t: 對，那你可以告訴我這裏兩個一樣的圖形是甚麼形?
- sA: 三角形

- t: 其他都是甚麼形?
 sA: 長方形。
 t: 所以它是……?
 sA: 三角柱。

從訪談中發現 A 生在柱體與錐體的形體命名停留在一般形體的情況，對於翻轉後的形體就容易被混淆。透過問答方式，先確認和建構學生的學習概念，再帶入題目，使學生再次檢驗，能強化其建立的概念。

構成要素概念

課程中師生對話的互動歷程記錄如下：

- t: 剛剛已經把構成要素的表格寫出來，也告訴你們構成要素個數間的關係，請問七角柱有幾個面？
 s12: 9 個。
 t: 你怎麼知道？
 s12: 因為旁邊有 7 個面，再加底面。
 t: 有幾條邊？
 sA: 嗯〔停了三秒鐘〕，21。
 t: 你怎麼知道是 21 條邊？
 sA: 因為有 3 層。
 t: 可以指出來哪 3 層嗎？
 sA: 〔指柱體上、中、下〕。
 t: 嗯，很好，所以上、中、下共有 3 層，所以七乘以三等於 21 條邊。那七角柱有幾個頂點呢？
 s19: 14 個頂點。
 t: 哪裏看到 14 個頂點？
 s19: 上和下。

圖五是學生的學習單記錄，可見學生在構成要素的推論有誤，無法針對算式提示填入正確答案。學生不懂算式的意思，亦沒有觀察到構成要素個數間的關係，無法正確填入運算符號及數字。透過師生課後訪談的內容，發現學習單內的算式填空，學生不太明白這題的意思，亦不懂為何自己會這樣填寫數字及運算符號。教師藉由引導過程，解決其錯誤概念，並利用問答方式，既可監控學生的學習情況，亦可理解學生的思考歷程，透過訂正的方式，再次檢驗學生是否已經學會此概念。

圖五：sA 作答表現-3

二、觀察形體，各組分工合作完成下列空格。

形體 特性					
形體名稱	三角柱	長方體	五角柱	六角柱	圓柱
底面形狀	三角形	正方形	五邊形	六邊形	圓形
側面形狀	長方形	長方形	長方形	長方形	
底面個數	2	2	2	2	2
側面個數	3	4	5	6	1
面的個數	5	6	7	8	
邊的個數	9	12	15	18	
頂點個數	6	8	10	12	

相加

4. 觀察角柱「面的個數」、「邊的個數」、「頂點個數」分別和「底面邊數、頂點」有何關係？

角柱 \Rightarrow 面的個數 $\underline{\quad\quad}$ 底面邊數 $\underline{\quad\quad}$ (3)
 邊的個數 $\underline{\quad\quad}$ 底面邊數 $\underline{\quad\quad}$ (6)
 頂點個數 $\underline{\quad\quad}$ 底面頂點個數 $\underline{\quad\quad}$ (0)

t: 三角柱底面有幾條邊？

sA: 3條。

t: 嗯，沒錯。那三角柱有幾個面呢？

sA: 5個。

t: 現在來看這幾個底面邊數，和角柱面的個數有甚麼關係呢？

sA: [沒回答]

t: 你想想看這數字之間有沒有關係？

sA: 面的個數都比底面邊數多2。

t: 沒錯！那如果反過來說，面的個數等於底面邊數怎麼樣？

sA: 加2嗎？[疑問]

t: 對呀！那接下來你想一下邊的個數跟底面邊數的關係呢？

sA: [停頓三秒]是3倍吧？

t: 那你想想看，邊是不是上下底面，各兩組，還有側面，所以是3倍。

sA: 喔！懂了！

t: 那你想想看，頂點的個數跟底面邊數呢？

sA: 2倍。

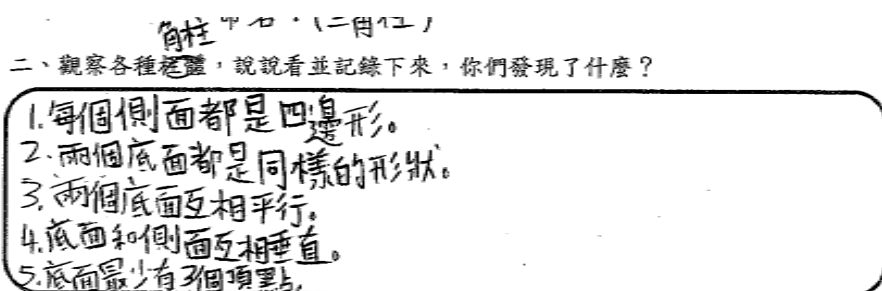
透過訪談除了可知道 A 生的學習狀況，亦能使其專注於學習上，解決注意力不集中的問題，並能給予即時回饋，令教師知道是否及時改變教學方法和內容。最後要學生藉由形體算出其頂點、邊、面的個數，並根據觀察說出頂點、邊、面的個數與形體間的關係，順利使學生達成課程的學習目標。

B 學生的學習表現

形體定義概念

從形體分類概念令學生學會分類柱體與錐體，希望能從中分析角柱、角錐、圓柱、圓錐的特性。學生學習歷程及學習狀況如下：圖六中第一至三點是研究對象在教師教學之前，和同組同學進行討論的結果，記錄在學習單上；第四及五點是經由教師進行全班教學時，B 生所補寫的內容。

圖六：sB 作答表現-1



B 生一開始認為角柱的側面都是四邊形。以下為課程的教學記錄，經由教師引導，先撇除正方體，其他角柱側面為長方形，再至正方體側面的正方形可歸類為長方形的一種，這三個步驟的學習，正是教師引導和學生學習的重要歷程。

t: 誰可以跟我講角柱有甚麼特性？

s10: 上下底面平行

t: 嗯，很好。還有嗎？

s16: 底面最少有三個頂點

t: 沒錯，底面是三角形、四角形、五邊形、六邊形，所以底面有三個頂點或以上。

s13: 有兩個底面，而且長得一樣。

t: 嗯，那跟剛剛 s10 說得結合，有兩個底面相等且平行，對嗎？

s 全班: 對。

s20: 角柱的底面和側面垂直。

t: 還有甚麼呢？

sB： 側面都是四邊形。

t： 那你們覺得正方體的側面是正方形，可以跟剛剛其他形體的側面是長方形做甚麼連結嗎？

sB： 我知道，正方形是長方形的一種，所以可以說，角柱的側面都是長方形。

柱體與錐體展開圖和透視圖

學生有分類概念、形體定義及構成要素概念後，接着透過這些學習過的概念進行解題應用，亦即是判斷形體透視圖和展開圖。學生的學習歷程及學習狀況如下：

t： 請問圓柱體拆開之後會有甚麼形狀？

s18： 圓形。

t： 圓形在哪裏。

sB： 圓柱的底面。

t： 那圓柱的側面是甚麼形狀？

s07： 圓形。

t： 有同學有不同的想法嗎？

s13： 長方形。

t： 那我們來看看這裏。上下底面是圓形，那這個側面拆開是甚麼形？

s全班：長方形。

t： 沒錯！那老師問你們，這長方形的寬是甚麼？

sB、s10、s13、s24：柱高。

t： 那長方形的長是甚麼？

sB： 圓柱的周長。

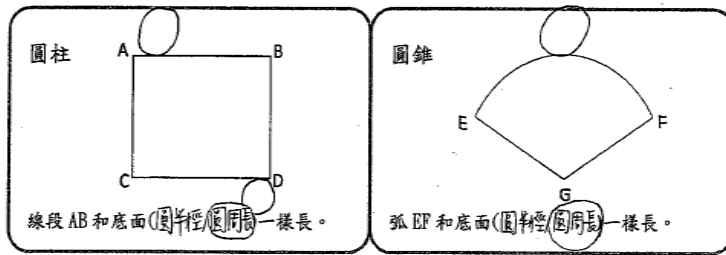
t： sB說的很棒喔！沒錯，圓柱的側面是一個長方形，長方形的長是圓柱的底面周長，寬是柱高。

從教學對話中可知，sB一開始是不知道圓柱側面的形狀為何，透過教師演示教具給予學生學習的鷹架，過渡到了解圓柱的側面是長方形；接着到長方形的長和寬代表圓柱的哪些部分，這部分有前面的引導為開端，更能建立學生「長為圓柱底面周長，寬是柱高」的概念。學生在立體形體對應展開圖的迷思概念，透過教師口頭引導及教具輔助，協助學生解決這一類型的迷思。圖七是學生學習過後，透過學習單再次檢驗學生是否學會此概念。

在形體名稱、透視圖對照和展開圖對應的過程，是先展示角柱和角錐的展開圖，要求學生臆測，再統整判斷策略，接着要學生進行練習。以下是學生的學習狀況及思考歷程：

圖七：sB 作答表現-2

五、操作過後，請依下列提示畫出圓柱和圓錐的展開圖。



- t: 你怎麼知道他是三角柱。
- s21: 因為有兩個底面。
- t: 哪裏是它的底面?
- sB: 兩個三角形。
- t: 有三角形，那你們怎麼知道他是三角柱，而不是三角錐呢?
- sB: 因為柱體有兩個底面。
- t: 喔~除了這個，還有別的同学有不同的想法嗎?
- s01: 有長方形。
- t: s01，三角柱哪邊是長方形?
- sB、s01: 側面。
- t: 透過兩個底面的形狀和側面形狀，來判斷這個展開圖是三角柱的!

由此發現，學生在判斷展開圖的過程有自己的想法，教師扮演協助學生整理判斷的流程，但不硬性規定學生都要照着這個判斷標準，因為有很多種判斷的方式，只要令學生可以自行進行正確判斷即可。

教師省思

教與學之間有着緊密的連結，既是師生互動的過程，亦是知識傳遞的重要歷程。作者透過每堂課的課後省思，歸納整理出需要修正、調整的部分，並即時在下一節課中進行修正後的教學，以應學生學習情況並提升學生的學習成效，這亦是學習軌道理論中最重要、最值得保留的部分。在教學過程中，課程設計從一開始着重柱體表面積，到後來配合學校版本改成柱體與錐體的概念教學，因為重點不同，在學習單的編輯上亦有大幅修正。每堂課教學後，除一方面省思、檢討這一堂的教學內容，還不斷思考下堂課如何更好，學習單的編排往往總在最後一刻還在修改，目的是希望能帶來最好的教學，清楚且有條理地將單元的概念完整呈現給學生，令學生能夠對立體形體有清晰的思維。

在教學內容部分，能夠與教科書內容相呼應，將教科書作輔助教材，要求學生在課堂練習，以達到概念的精熟。在班級經營上，是需要累積更多經驗，才能抓住學生的目光，課程才能發揮得淋漓盡致。在「分類概念」的課程中，學生對於實體教具感到好奇，容易分心；在學習單的列印上，須調整顏色比例，若能以透視圖方式呈現，學生將更容易判斷。在各組分享分類方式的過程中，有些學生已在安親班或補習班學過這單元，故會主導整組的思維方式，容易使學生的思考僵化。

活動二「形體定義概念」的教學中，應給予學生更多發表機會，需有充分時間進行統整，以利學生熟悉形體概念。因為教學時間不足，使得上課壓力大，語速因而增快許多，同時亦導致學生學習的負擔過大，整體教與學的效果都不盡理想，須待下一節課再次複習和釐清概念。

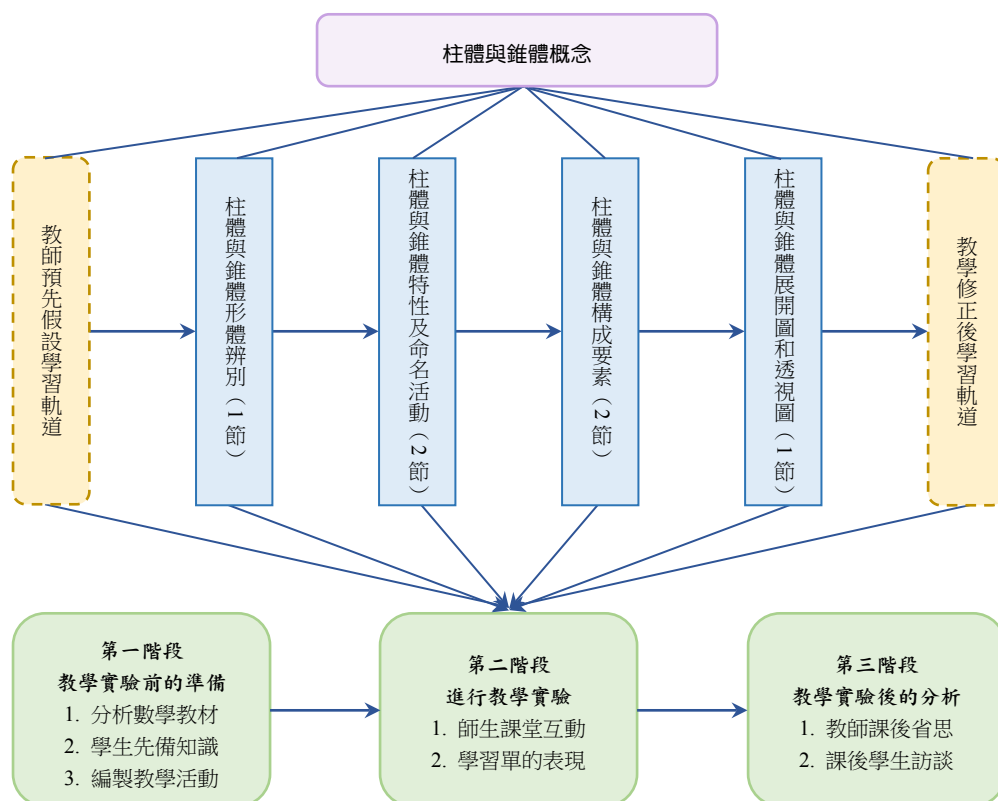
「構成要素概念」是柱體與錐體概念學習的第三項活動，原本希望節省時間，透過一人觀察一種形體，整組共同進行統整和討論。但結果發現，時間雖然縮短，但學生對底面邊數和形體面、邊及頂點個數都無法連結，且在搭建這三行算式的鷹架時，無法做有效的連結。故此在下節課便把表格放大，張貼於黑板上，每位學生都自行點數構成要素的個數，教師整理至黑板表格中，由學生檢驗，再透過算式的引導發現個數之間的關係，達到本堂課的教學目標。

第四項活動是「柱體與錐體展開圖和透視圖」。透視圖部分的教學，原本想運用黏土和吸管當作骨架棒和頂點珠，但擔心黏土過重，學生製作上易生困難，後來改以現成教具；又因教具使用上有所限制，故花費了許多時間在組合立體形體。展開圖的教學原本以為學生對這部分的學習較為困難，但他們對此已有一定了解。在判斷展開圖的策略教學，過程過於制式化，應讓學生討論，共同研擬出判斷展開圖的策略。

從以上可見，這四個子概念於柱體與錐體這個單元中皆是不可或缺的部分，彼此有着些許重疊和包含之處。在學習軌道的設計，作者認為毋須更改活動之間的順序，因教學概念的銜接十分順暢。但作者發現需要增加概念教學的時間，才能有充裕時間展現優質的教學內容，將概念清楚且有系統地教給學生，因此將「柱體與錐體特性及命名」和「柱體與錐體構成要素」兩項活動各增加 1 節課變成 2 節課，由原先設定的 4 節課擴充成 6 節課，以提供學生充分時間學習。圖八為修正後學習軌道融入國小柱體與錐體概念教學的情形。

「教」與「學」皆需要充足時間，欲速則不達，學生需要經驗的體會，才能真正學到知識。透過每一次課程結束後的省思，能更看清哪些是自己的優點，哪些是教學上須修正的部分。教學亦是如此，透過學習軌道教學實驗不斷嘗試，省思再嘗試，在這循環的過程增加自己的經驗；透過與他人分享，提升教學的能力。願在教育這條路上，盡心盡力為學生付出，創造高品質的教學內容和環境，給學生優質的學習過程。

圖八：修正後學習軌道融入國小柱體與錐體概念教學



參考文獻

- 朱建正 (1998)。〈立體圖形的教材處理〉。載台灣省國民學校教師研習會 (編)，《國民小學數學科新課程概說 (高年級)》 (頁 184-193)。台北，台灣：台灣省國民學校教師研習會。
- 沈佑霖 (2003)。《國小六年級學童體積概念之研究》 (未出版碩士論文)。屏東師範學院，屏東，台灣。
- 教育部 (2008)。《國民中小學九年一貫課程綱要：數學學習領域》。台北，台灣：教育部。
- 陳嘉皇 (2008)。〈國小面積資訊教材學習軌道設計與教學成效探討〉。《高雄師大學報》，第 25 期，頁 103-124。
- 陳嘉皇 (2017)。〈以心智習性為主之數學教科書內容比較研究〉。《當代教育研究季刊》，第 25 卷第 1 期，頁 1-44。doi: 10.6151/CERQ.2017.2501.01
- 陳嘉皇、吳碧智 (2016)。〈圓形複合圖形面積解題學習軌道之教學實驗研究〉。《教育科學研究期刊》，第 61 卷第 1 期，頁 1-41。doi: 10.6209/JORIES.2016.61(1).01

- 陳嘉皇、詹晏瑜（2018）。〈學習軌道理論應用於國小立體形體概念教學實驗研究〉。《人文社會科學研究：教育類》，第12卷第3期，頁1-33。
- Clements, D. H., & Sarama, J. (2004). Learning trajectories in mathematics education. *Mathematical Thinking and Learning*, 6(2), 81-89. doi: 10.1207/s15327833mtl0602_1
- Confrey, J., Maloney, A. P., Nguyen, K. H., Wilson, P. H., & Mojica, G. (2008, April). *Synthesizing research on rational number reasoning*. Paper presented at the Research Pre-session of the National Council of Teachers of Mathematics, Salt Lake City, UT, U.S.
- Corcoran, T., Mosher, F. A., & Rogat, A. (2009). *Learning progressions in science: An evidence-based approach to reform*. New York, NY: Center on Continuous Instructional Improvement, Teachers College-Columbia University.
- Gravemeijer, K. (1999). How emergent models may foster the constitution of formal mathematics. *Mathematical Thinking and Learning*, 1(2), 155-177. doi: 10.1207/s15327833mtl0102_4
- Gravemeijer, K. (2004). Local instruction theories as means of support for teachers in reform mathematics education. *Mathematical Thinking and Learning*, 6(2), 105-128. doi: 10.1207/s15327833mtl0602_3
- Koester, B. (2003). Prisms and pyramids: Constructing three-dimensional models to build understanding. *Teaching Children Mathematics*, 9(8), 436-442.
- Simon, M. A. (1995). Reconstructing mathematics pedagogy from a constructivist perspective. *Journal for Research in Mathematics Education*, 26(2), 114-145. doi: 10.2307/749205
- Simon, M. A., & Tzur, R. (2004). Explicating the role of mathematical tasks in conceptual learning: An elaboration of the hypothetical learning trajectory. *Mathematical Thinking and Learning*, 6(2), 91-104. doi: 10.1207/s15327833mtl0602_2
- Wilson, P. H., Sztajn, P., Edgington, C., & Confrey, J. (2014). Teachers' use of their mathematical knowledge for teaching in learning a mathematics learning trajectory. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 17(2), 149-175. doi: 10.1007/s10857-013-9256-1
- Wilson, P. H., Sztajn, P., Edgington, C., & Myers, M. (2015). Teachers' uses of a learning trajectory in student-centered instructional practices. *Journal of Teacher Education*, 66(3), 227-244. doi: 10.1177/0022487115574104

Action Research on the Application of Learning Trajectory Theory to the Concept Teaching of Cylinders and Cones

Chia-Huang CHEN

Abstract

This study focused on two sets of primary mathematics textbooks in Taiwan, analyzing the unit contents about cylinders and cones. It used learning trajectories to design curriculum and arrange teaching activities for teaching experiments, examining the learning performances of two students at different levels of learning. The study aimed to understand the problem-solving strategies of the students and their myths, if any, in the learning process through the reflective diary of the teacher, for improving teaching effectiveness as well as helping students build a complete and systematic conception of cylinders and cones. Students are expected to have complete thinking in solving such problems, and have the ability to correctly solve mathematical problems.

Keywords: learning trajectories; cylinders and cones; textbook; curriculum