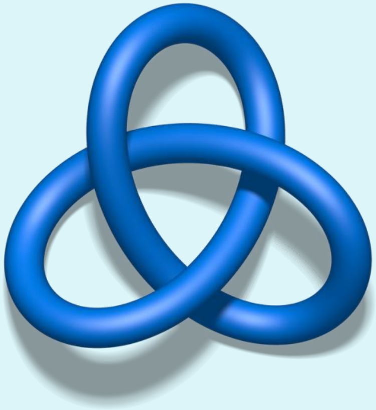
紐結和不變量

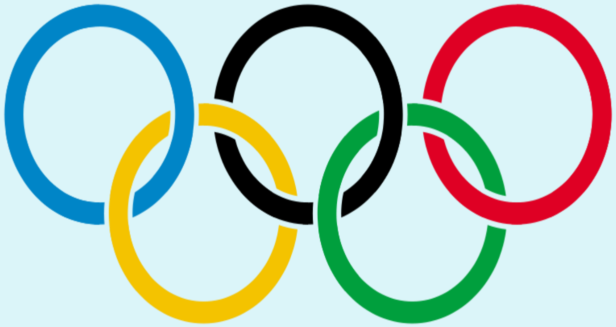
MATH4900
Seminar

紐結理論/Knot Theory

- 紐結/Knot



- 鏈環/Link



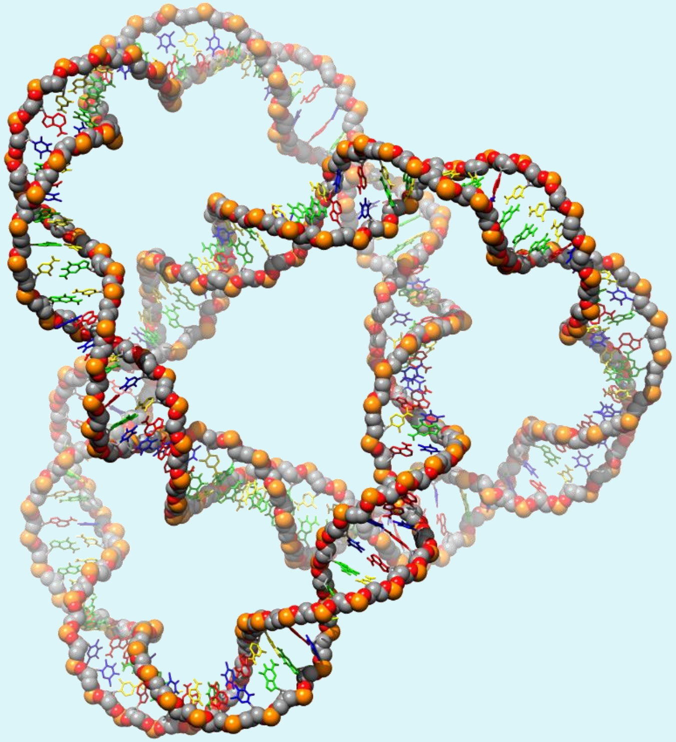
生活中無處不在的紐結

- 鞋帶，水手結，辮子……

紐結的應用

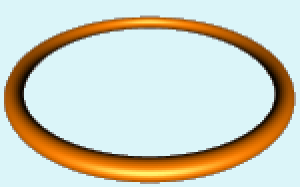
- DNA雙螺旋
- 化學分子
- 拓撲/topology

（龐加萊猜想/Poincare conjecture）



紐結的定義和理論要點

- **紐結**是一個圈；**鏈環**是若干個圈。
- 紐結理論試圖判定**給定紐結是否平凡/trivial**，或更一般的**兩個給定紐結是否相同/isotopic**。

 =  ?

紐結理論的研究工具

紐結不變量/knot invariant

- 紐結補空間/knot complement

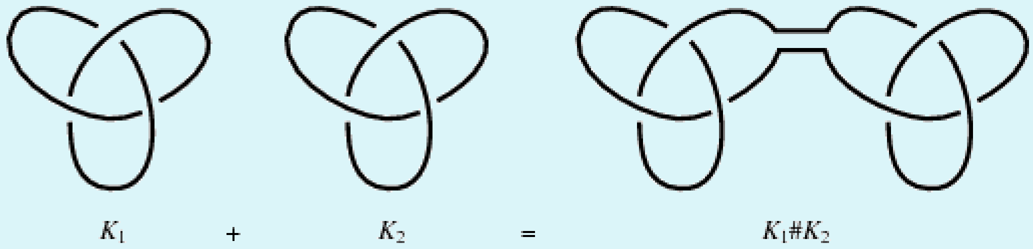
  太複雜，理論意義大於實際應用。

需要更實用易算的不變量...

- 三色性/Tricolorability
- 亞歷山大多項式/Alexander polynomial

其他定義

- 紐結連通和 /connected sum



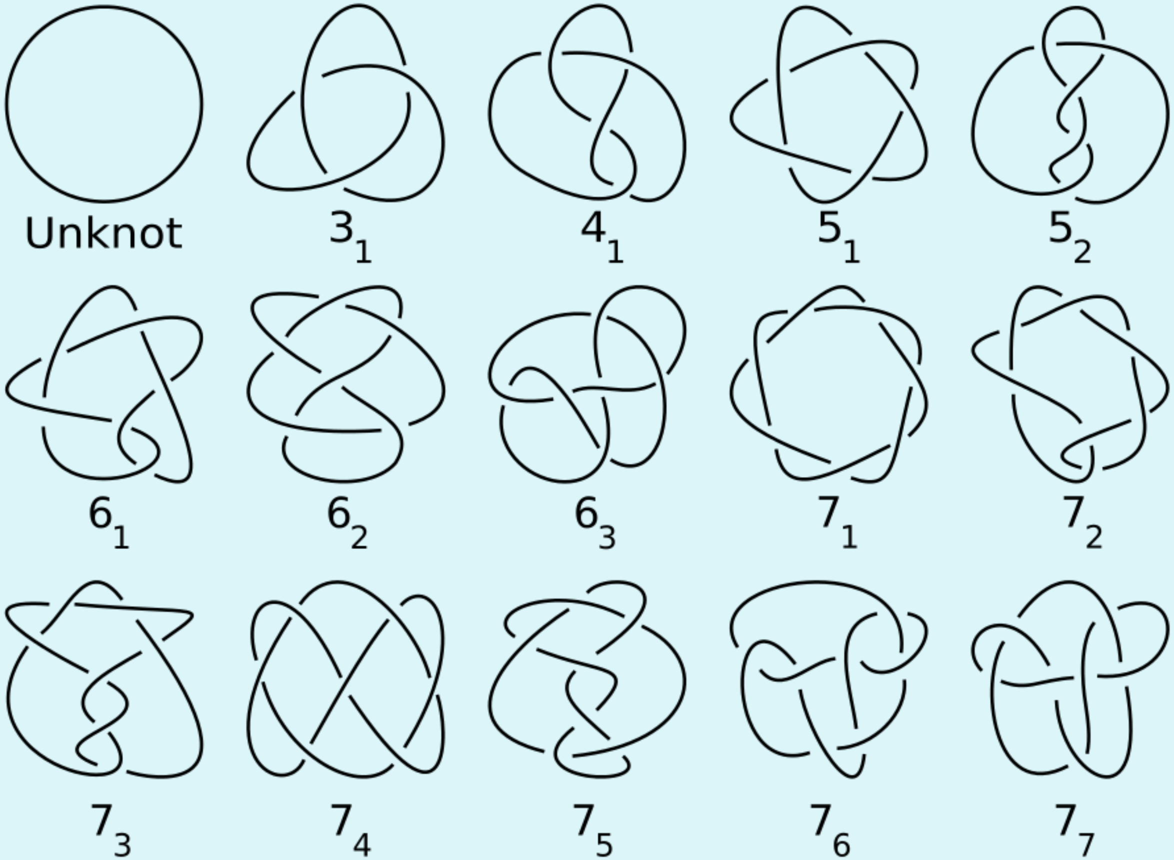
- 素紐結/Prime knot：不能分解的非平凡紐結

定理：任何紐結都可以唯一的分解成素紐結的連通和。

- 紐結投影圖/knot diagram；交點/crossing

左圖是平凡紐結的不平凡紐結圖，共五個交點。

紐結表/Knot Table



前瞻

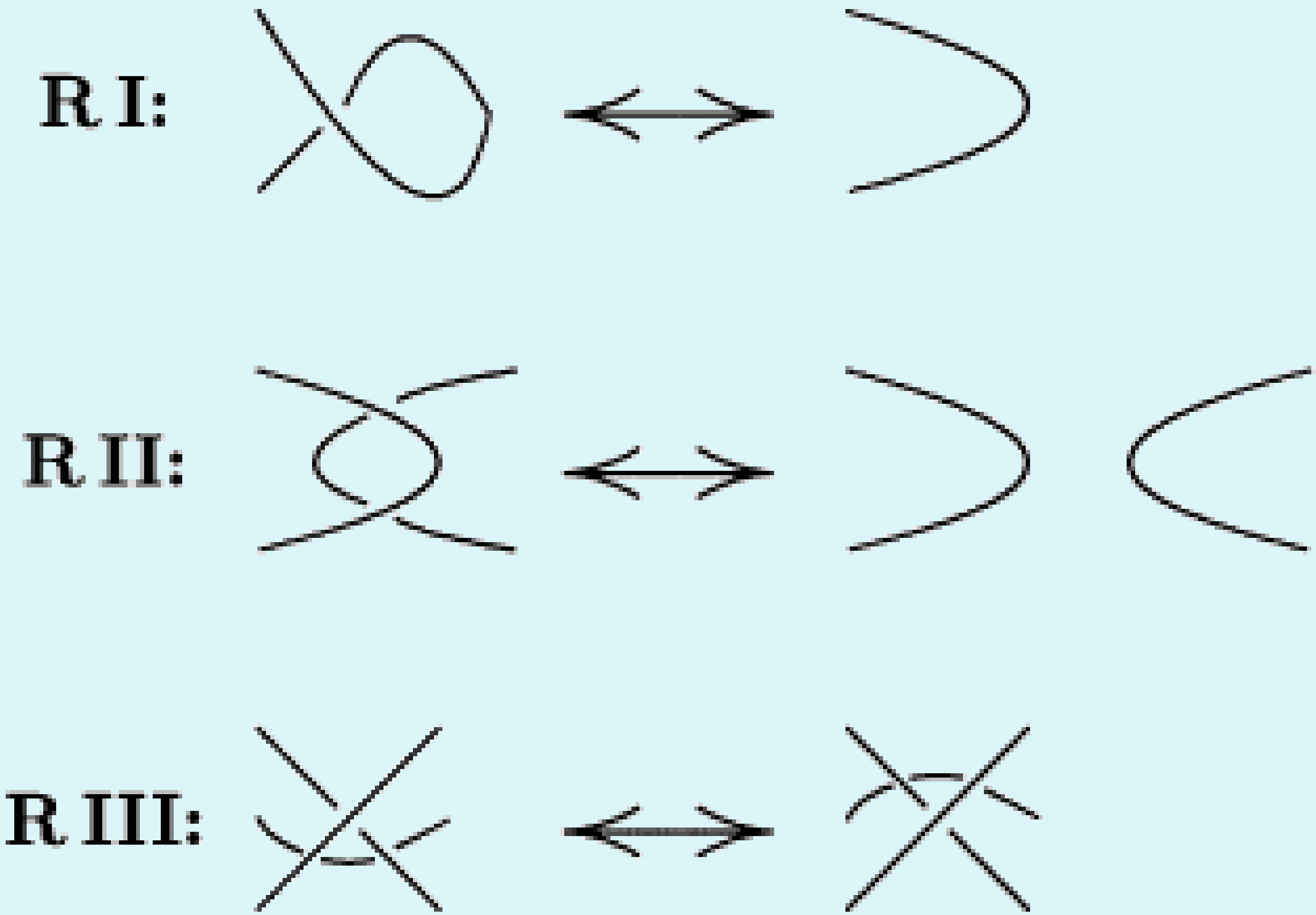
I. 一個簡單有趣的紐結不變量：**三色性**
應用：區分**三葉結/trefoil knot**和**平凡結/unknot**。

II. 一個重要的紐結不變量：**亞歷山大多項式** $\Delta_K(t)$
應用：區分所有不多於8個交點的紐結。

III. **交錯結/alternating knot**

IV. **環面結/torus knot**、**衛星結/satellite knot**、**纜結/cable knot**

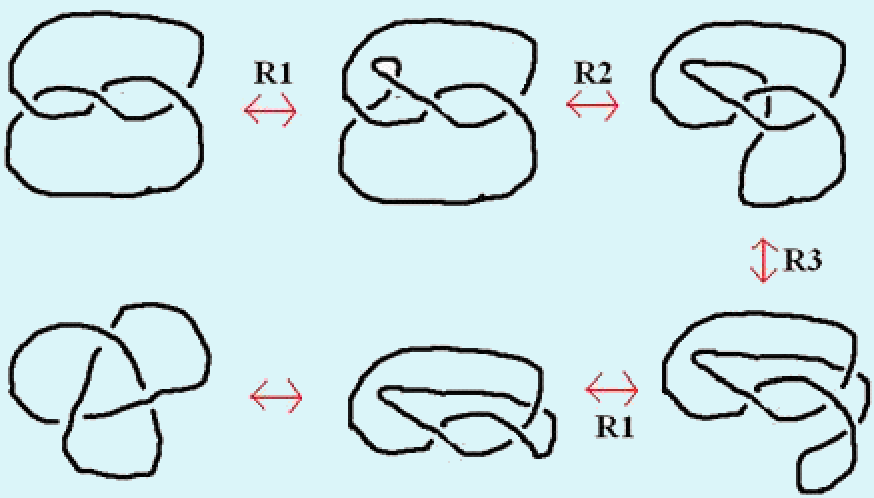
I. Reidemeister變換/Reidemeister moves



紐結投影圖

定理：一個紐結的不同投影圖可由上述三種基本變換(Reidemeister moves)合成得到。

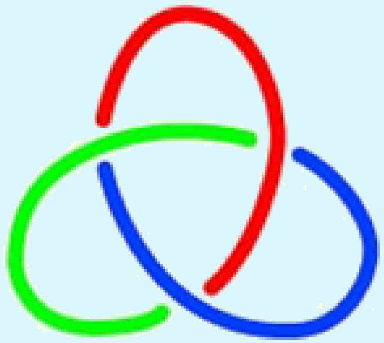
例：三葉結投影圖之變換



紐結投影圖三染色

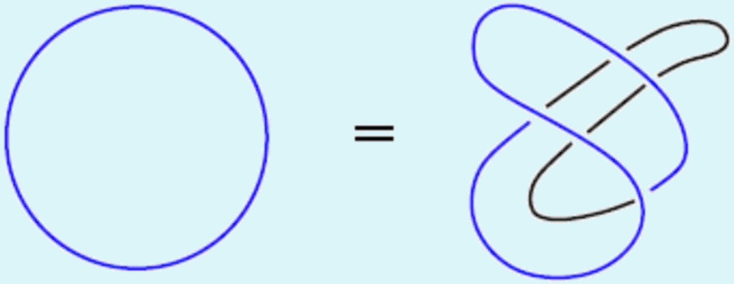
若一個紐結投影圖的線段可用三種顏色染色並滿足

- 每個交點處包含1種或3種顏色，
- 投影圖包含所有3種顏色，



則稱此投影圖滿足**三色性**。

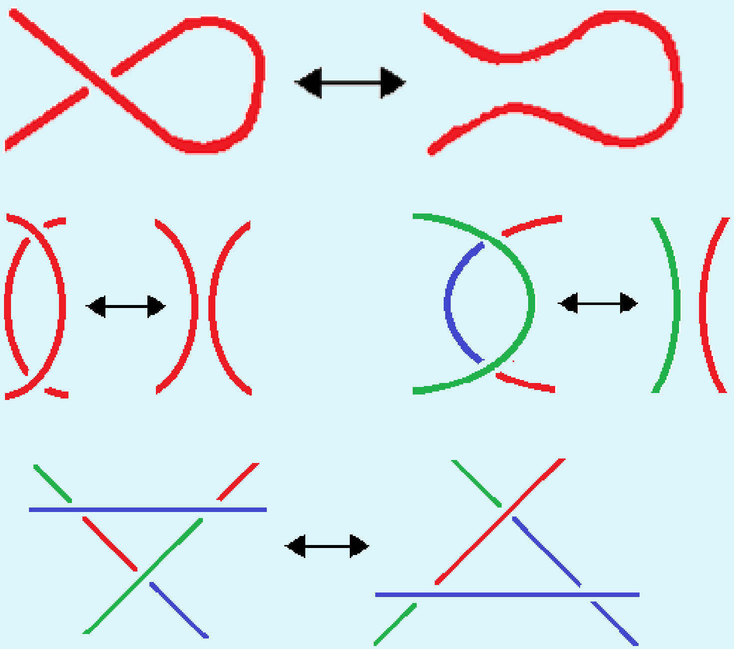
右圖兩個平凡紐結的投影圖都不滿足三色性。



三色性是紐結不變量

- 一個紐結的不同投影圖或同時滿足三色性，或同時不滿足三色性。

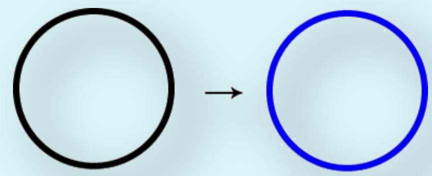
證明:



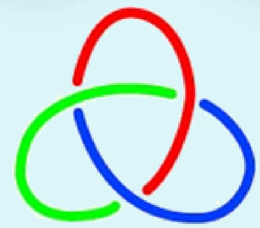
故三色性是紐結不變量。

平凡結、三葉結和八字結

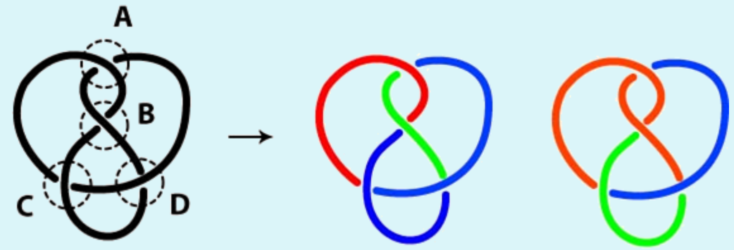
- 平凡結/unknot



- 三葉結/trefoil knot



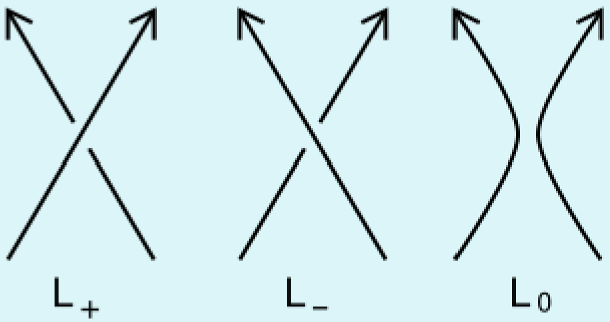
- 八字結/figure-eight knot



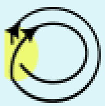
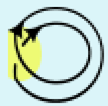
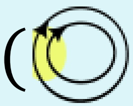
- 結論：平凡結和三葉結不同，三葉結和八字結不同。
- 無法判定平凡結是否和八字結相同。

II. 拆接關係式/Skein relation

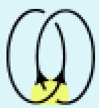
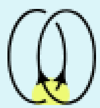
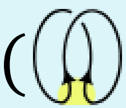
- **Conway** ***polynomial*** $C(z)$由以下遞歸關係給出
  - $C(O) = 1$, O代表平凡紐結投影圖。
  - 拆接關係式 $C(L_+) = C(L_-) + zC(L_0)$



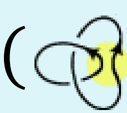
平凡鏈環、Hopf鏈環和三葉結

- $C($$) = C($$) + zC($$)$

故平凡鏈環的Conway polynomial是0。

- $C($$) = C($$) + zC($$) = 0 + z = z$

故Hopf 鏈環的Conway polynomial是z。

- $C($$) = C($$) + zC($$) = 1 + z^2$

故三葉結的Conway polynomial是$1 + z^2$。

性質

可以證明Conway多項式滿足以下性質：

- Conway多項式是紐結（鏈環）不變量：
  - 歸納定義不依賴於交點的選取。
  - 同一紐結（鏈環）的不同投影圖之Conway多項式相同。

- 紐結之Conway多項式是z^2的多項式，且不依賴於紐結的定向/orientation。

亞歷山大多項式(Alexander Polynomial)

- 給定紐結K，其**亞歷山大多項式** $\Delta_K(t)$ 可如下從Conway多項式得到：
  1. 將$C(z)$中的z^2替換成$t-2+t^{-1}$
  2. 乘上唯一恰當的$\pm t^k$，得到常數項大於零的多項式。

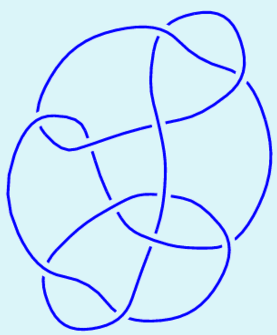
例：從三葉結的Conway多項式$C(z)=1+z^2$作替換，
得到$1+(t-2+t^{-1})=t-1+t^{-1}$。
乘上t, 得亞歷山大多項式 $\Delta_K(t)=t^2-t+1$。

- 亞歷山大多項式是對稱多項式：$\Delta_K(\mathrm{t})=\Delta_K(1/t)t^{\deg(\Delta_K)}$

練習：驗證八字結的亞歷山大多項式等於 t^2-3t+1。

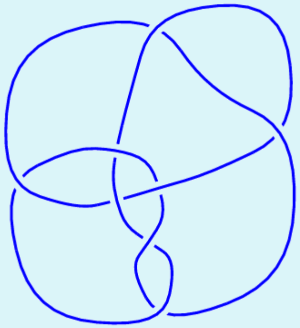
紐結表和亞歷山大多項式

- 紐結表中交點數 ≤ 8的紐結之亞歷山大多項式兩兩不同，所以亞歷山大多項式可完全區分它們。
- 存在無窮多個非平凡紐結亞歷山大多項式等於1，如 $11n_{34}$



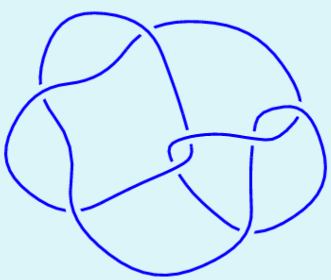
III. 交錯結/Alternating Knot

- *定義*：一個紐結稱為交錯結/alternating knot 如果它有交錯的投影圖——沿著圖中每條線，交叉點一上一下交替出現。

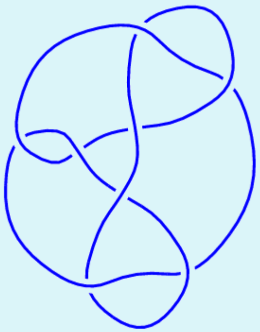


8_{17}

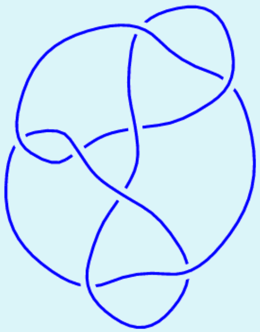
- 交叉數小於8的紐結全都是交錯結。
- 交叉數等於8的紐結中有3個非交錯結。



8_{19}



8_{20}



8_{21}

- 非交錯結遠多於交錯結。

交錯結的亞歷山大多項式

定理：交錯結的亞歷山大多項式必然是嚴格交錯多項式。

——多項式係數正負交錯出現

另一方面，非交錯結的亞歷山大多項式可能是也可能不是**嚴格交錯多項式**。

例：

- $\Delta_{8_{17}}(t) = t^6 - 4t^5 + 8t^4 - 11t^3 + 8t^2 - 4t + 1$

  交錯結，$\Delta_{8_{17}}(t)$是**嚴格交錯多項式**

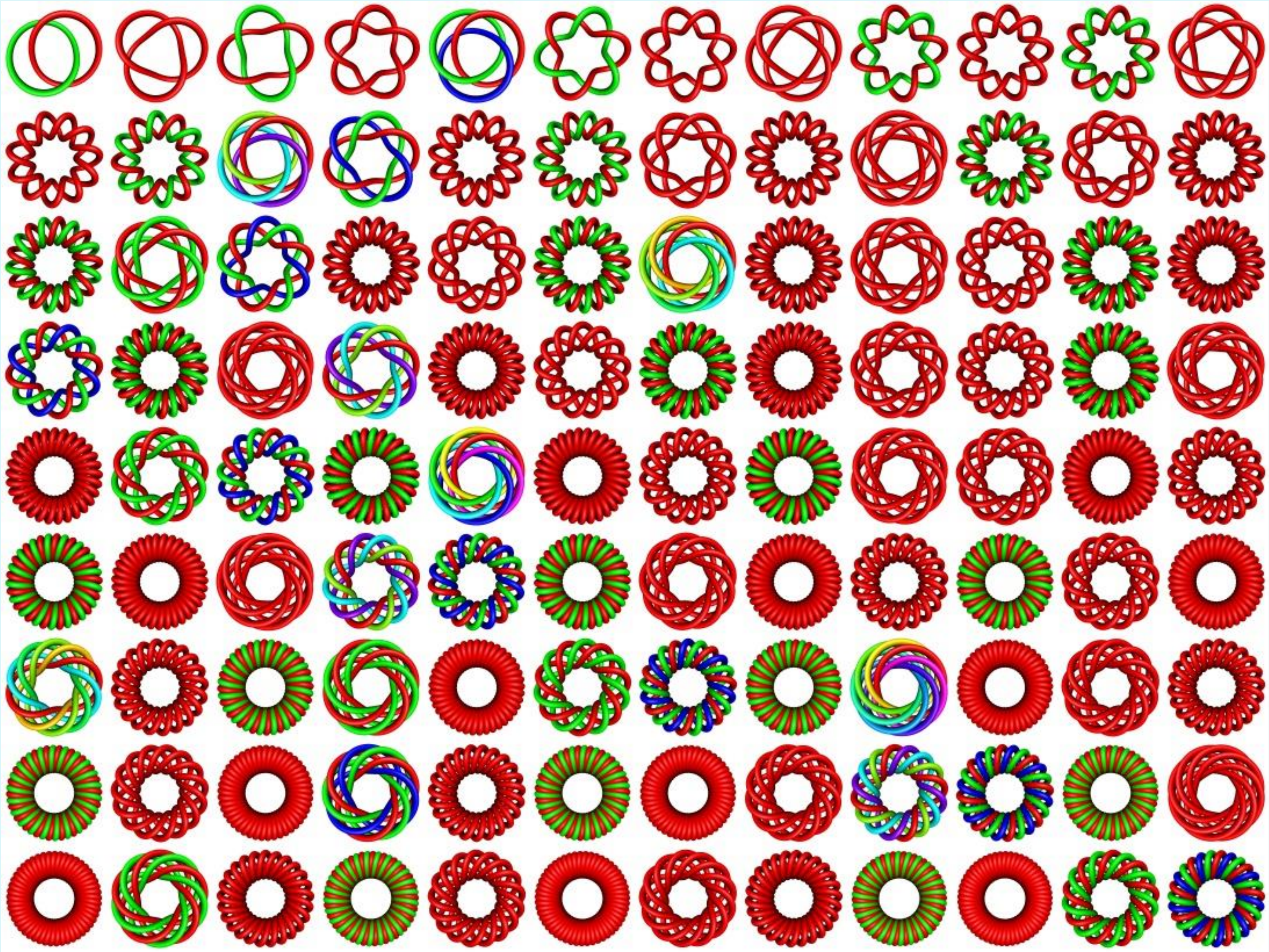
- $\Delta_{8_{19}}(t) = t^6 - t^5 + t^3 - t + 1$

  非交錯結，$\Delta_{8_{19}}(t)$不是**嚴格交錯多項式**

- $\Delta_{8_{20}}(t) = t^4 - 2t^3 + 3t^2 - 2t + 1$

  非交錯結，$\Delta_{8_{20}}(t)$**嚴格交錯多項式**

IV. 環面結/Torus Knot

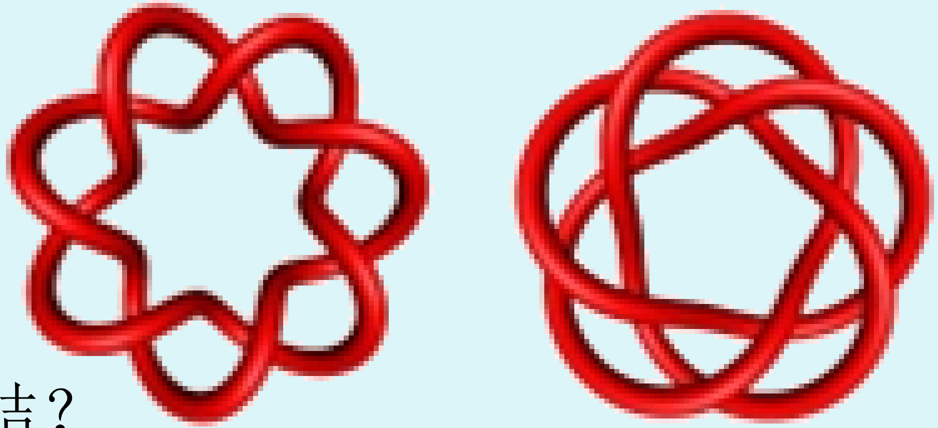


環面結

- $T_{m,n}$: 換面上並列m條平行線，向右錯位一條線共n次。
- $T_{m,n}$是紐結當且僅當 $\gcd(m, n) = 1$
- $T_{m,1}$ 是平凡結。
- $T_{m,n}$與$T_{n,m}$相同，故只需考慮 $m<n$。

環面結是否交錯?

- $\mathrm{T}_{2,n}$交錯結



- 當 $m>2, \mathrm{T}_{m,n}$非交錯結?
- $\mathrm{T}_{m,n}$的亞歷山大多項式:

$$\Delta_{\mathrm{T}_{m,n}}(t)=\frac{(t^{mn}-1)(t-1)}{(t^{m}-1)(t^{n}-1)}$$

特別的，$\Delta_{\mathrm{T}_{3,5}}(t)=\frac{(t^{15}-1)(t-1)}{(t^{5}-1)(t^{3}-1)}$

$$=t^{8}-t^{7}+t^{5}-t^{4}+t^{3}-t+1$$

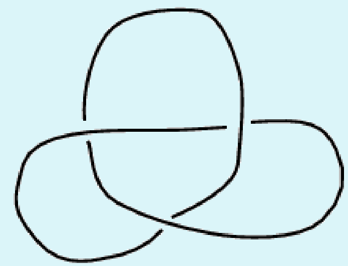
衛星結/Satellite Knot 和纜結/Cable Knot

給定兩個紐結K和P，定義衛星結K $*$P：

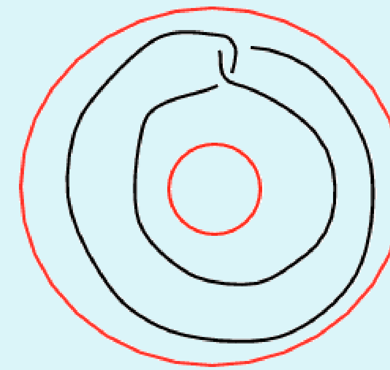
K：主星結/companion

P：模子/pattern

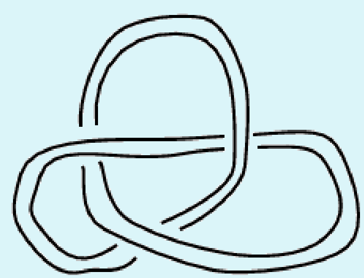
特別地，當模子P是環面結時，得到的衛星結叫做纜結。

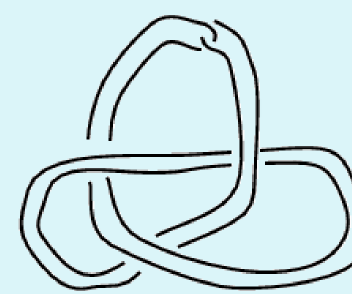


$\mathcal{K}$

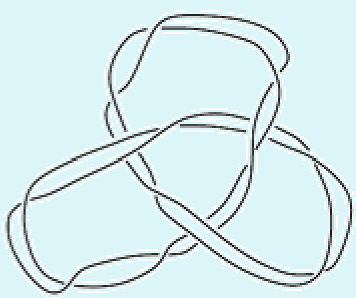


P





$\mathcal{K} \star P$



K2,11

纜結的亞歷山大多項式

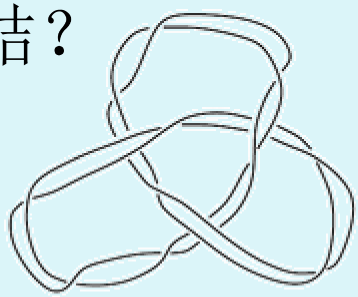
定理：纜結$\mathrm{K}_{m,n}$的亞歷山大多項式

$$\Delta_{\mathrm{K}_{m,n}}(t) = \Delta_K(t^m) \cdot \Delta_{T_{m,n}}(t)$$

$$= \Delta_K(t^m) \cdot \frac{(t^{mn}-1)(t-1)}{(t^m-1)(t^n-1)}$$

纜結的交錯性

給定一個非平凡交錯結K，纜結$K_{m,n}$是不是交錯結？



例：右圖紐結的亞歷山大多項式

$$
\begin{aligned}
&= \Delta_{\text{三葉結}}(t^2)\cdot\frac{(t^{22}-1)(t-1)}{(t^{11}-1)(t^2-1)} \\
&= (t^4-t^2+1)\cdot(t^{10}-t^9+t^8-\cdots-t+1) \\
&= t^{14}-t^{13}+t^{10}-\cdots
\end{aligned}
$$

不是嚴格交錯多項式。

故“交錯性”在纜結構造下不保持。

紐結理論小結

- 交錯結，環面結，衛星結，纜結
- 紐結不變量，三色性，亞歷山大多項式
  - 交錯結的亞歷山大多項式是嚴格交錯多項式
  - $\Delta_{\mathrm{T}_{m,n}}(t) = \frac{(t^{mn}-1)(t-1)}{(t^m-1)(t^n-1)}$
  - $\Delta_{\mathrm{K}_{m,n}}(t) = \Delta_K(t^m) \cdot \Delta_{T_{m,n}}(t)$