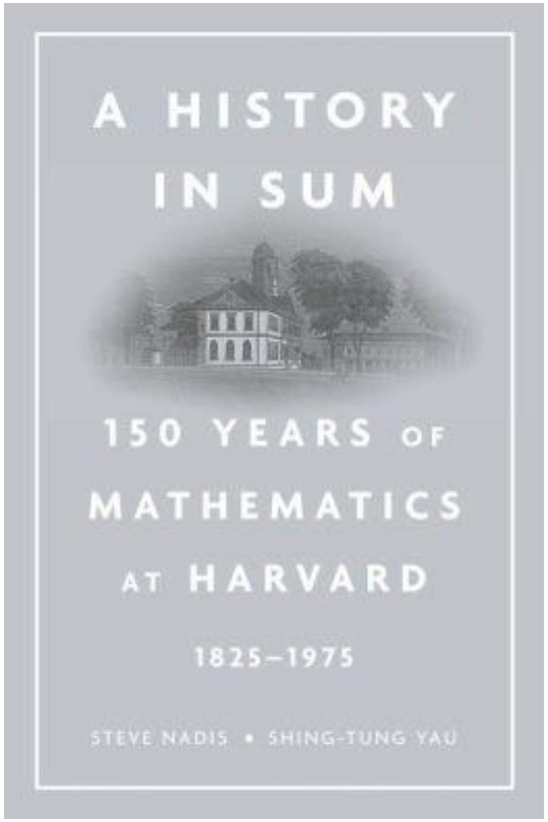
哈佛百年，中大五十：從哈佛百年數學看培育下一代

丘成桐
哈佛大學
香港中文大學

最近我與我的朋友 Steve Nadis寫了一本關於哈佛大學數學系歷史的書，由哈佛大學出版社出版。

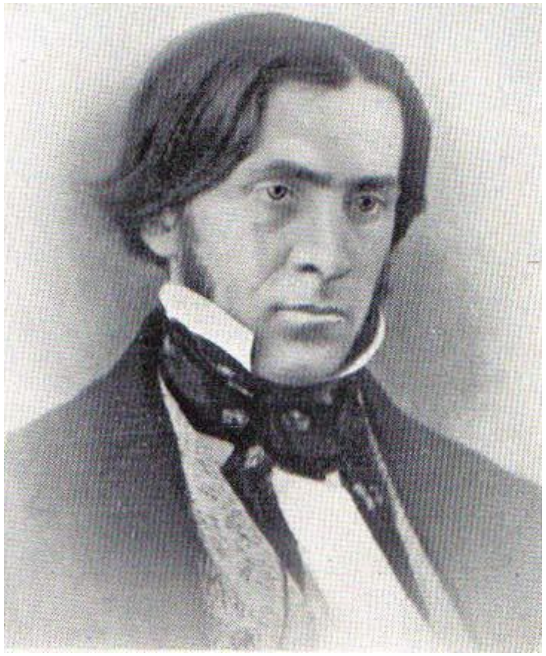


這個寫作計劃開始時，我還是哈佛數學系主任。我對於這個系偉大先驅者的人生頗感好奇。因為其中有些人藉著他個人的研究甚或透過他們的學生，改變了整個世界數學發展的路徑。

如果其他地方的人，能懂得欣賞這些數學家如何做研究，如何建立起這個優秀的學系，而且在這段過程裡，還協助建立了哈佛大學的地位，我認為這會是很棒的事。更何況，這些偉大哈佛數學家的個人軼事，讀來也饒有興味。

我喜歡閱讀數學史，認為好數學家需要知道數學的重要概念如何演進。這些概念的演進充滿了生命力，就像從初生嬰兒慢慢長大成人的過程，這段路可能很戲劇化，而且充滿了興奮與刺激。一旦我們了解數學發展的根源，就更能理解當今數學的發展。我相信，哈佛數學系從一個三流學系成長為世界級領導中心的過程，提供了很值得參考的個案，或許可以協助許多想建立世界級數學系的大學做為借鑑。我非常感謝我的合著者Nadis，他做了十分廣泛的研究，並採訪了許多哈佛的教師與校友。

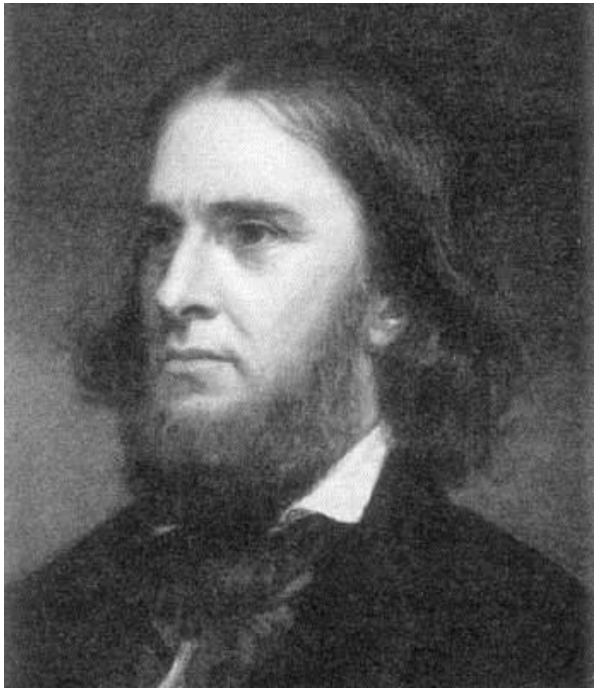
一 數學系的曙光：Peirce



Benjamin Peirce

我們的書是從1825年說起，當時16歲的Benjamin Peirce剛進哈佛。當他1829年獲得哈佛學士學位時，並沒有機會在美國研究數學，因為當時的美國還沒有學校設置博士班。Peirce因為經濟因素無法前往歐洲深造，結果他先在預科學校（preparatory school）教了兩年書，然後在1831年回到哈佛當導師（tutor）。此後一直到1880年去世為止，他一直留在哈佛。

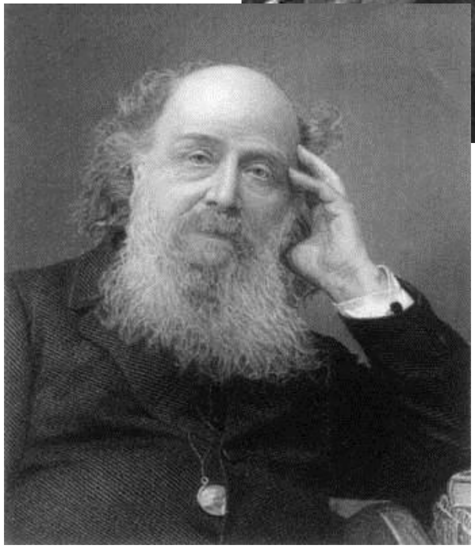
Peirce是第一位堅持數學家應該做原創性數學研究的美國數學家，也就是說，數學家應該要證明新定理，解決那些尚無人能解的問題。當時，不論在哈佛或美國其他高等教育機構，這樣的態度絕非主流。



Benjamin Peirce

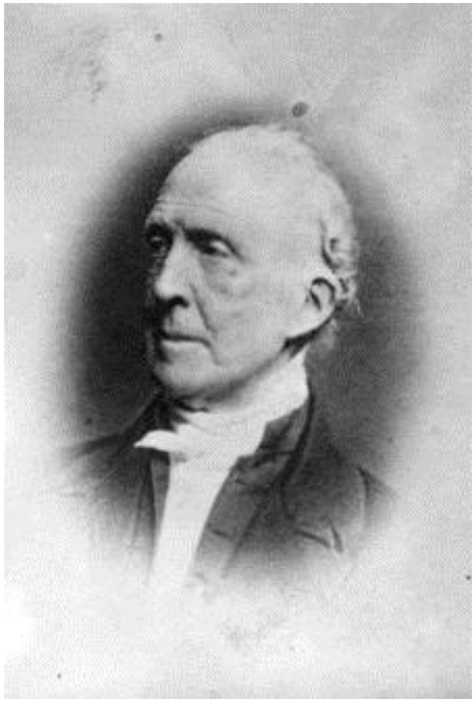
Peirce在23歲時，出版了一項關於完美數（perfect number）的證明，其中如果一個正整數的所有因數和（包括1在內）等於該數本身，就稱為完美數，例如6和28。當時所有已知的完美數都是偶數，而Peirce證明了如果存在奇完美數，它必定至少有4個質因數。直到56年之後，英國數學家James Sylvester和法國數學家Cl. Servais才能夠證出相同的結果，但他們不曉得，Peirce早在半個世紀前就完成了這項證明。

Benjamin Peirce



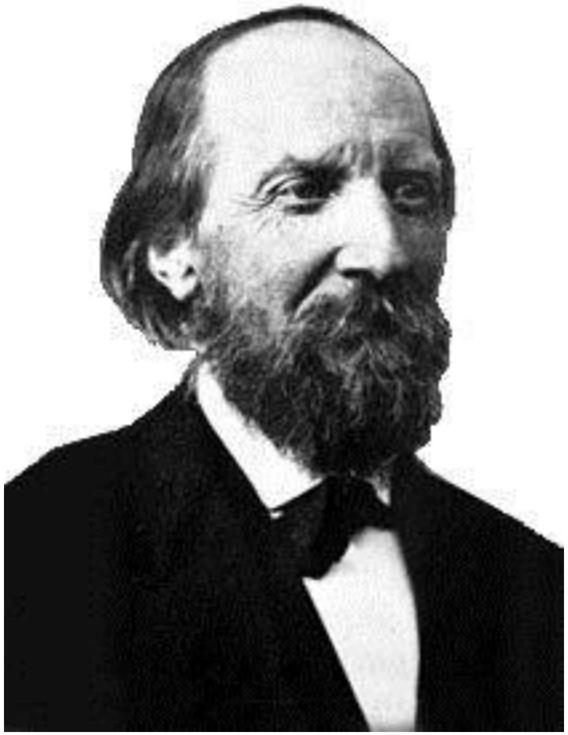
James Sylvester

然而，當時的哈佛校長Josiah Quincy卻催促Peirce去編寫教科書，Peirce質問哈佛校方，是否真要他從事「如此耗費時間，內容如此基本，對於渴望在科學達成更高成就的人完全沒有價值」的工作。當時做原創數學研究的概念實在太過奇特，在美國幾乎是前所未聞，而且也幾乎沒有人有資格去嘗試。



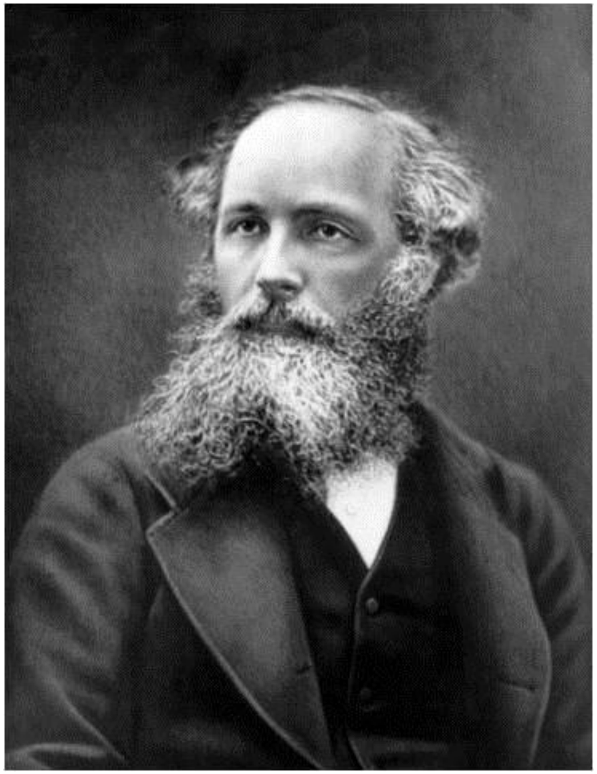
Josiah Quincy

多年之後，Peirce才在哈佛校長Thomas Hill身上，找到志同道合的盟友。Hill說：「我們最好的教授整天被繁重的教學與備課責任所禁錮，以致於根本沒有時間與精力去進行個人研究，提升科學與知識。」



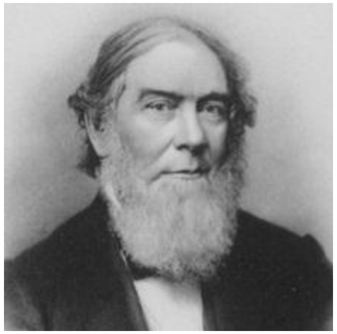
Thomas Hill

Peirce花了大量時間在天文學研究上，並在1839年哈佛學院天文台的建立過程中扮演關鍵的角色，他對「1843年大彗星」以及當時新發現的海王星軌道，都做了精密的計算。James Maxwell和Lord Kelvin都對Peirce的成就有高度評價。在61歲時，Peirce以線性結合代數（linear associative algebra）為主題，寫了一篇很長的論文，被視為美國人第一個在純數學中的重要貢獻。



James Maxwell

1848 年 ， Peirce 與 他 的 傑 出 朋 友 們 ， 包 括 Alexander Bache、Louis Aggassiz與Joseph Henry，一起建立了美國科學促進會(American Association for the Advanced of Sciences)。他們也協助肇建了美國國家科學院(National Academy of Sciences)，其中Peirce正是最活躍的成員。當1880年Peirce去世時，《哈佛磚紅報》表示「上週Peirce教授的過世，意味著本校失去了最閃耀的科學明星，甚至最卓越的教授。」基於他對數學系的貢獻，哈佛數學系仍稱呼新進教師為Peirce講師。

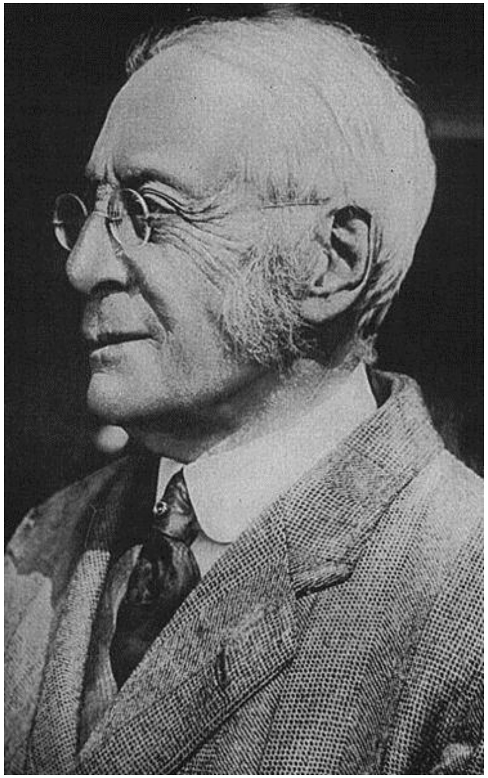


Alexander Bache

Louis Aggassiz

Joseph Henry

Peirce的時代，正是哈佛大學數學系由教學開始轉往研究的時代。事實上，1869年就職的Charles Eliot校長—他也是數學與化學教授—成立了哈佛的數學研究所，並由William Byerly在1873年成為第一位數學博士。

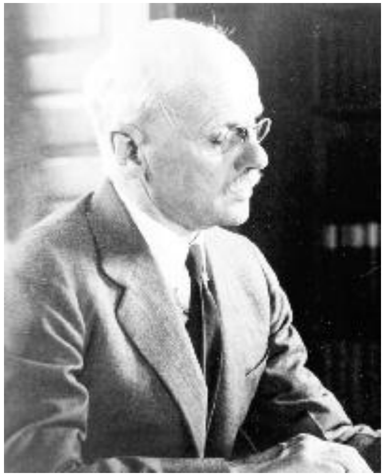


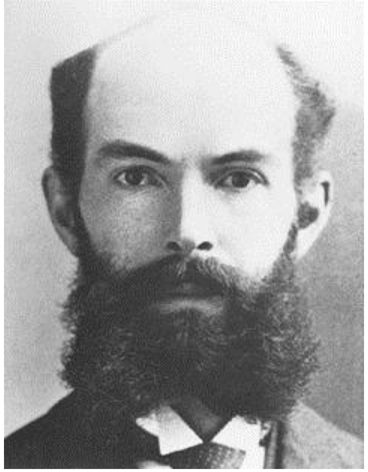
Charles Eliot

William Byerly(right)

二 轉變成研究導向的學系

哈佛數學系在Peirce過世之後，經歷了一段「倒退期」，根據Julian Coolidge的說法：「....科學活動是一落千丈。」需要多年之後才能破繭重生。不過到了二十世紀之交，William Fogg Osgood和Maxime Bôcher已經將哈佛建立成分析學領域的熠熠新星，分析學是數學的一支，包括微積分在內。他們將數學研究轉變成數學系的核心任務，而不再是像Peirce這樣特立獨行之士的嗜好。面對其他大學的強大競爭，哈佛數學系儼然成為當時美國最好的數學系。

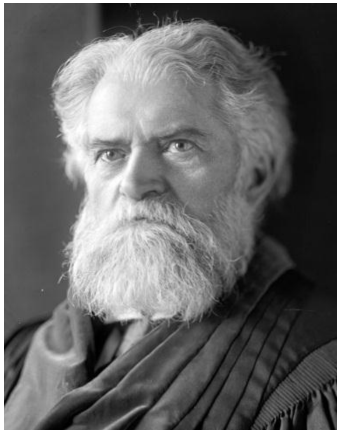

Julian Coolidge


William Fogg Osgood


Maxime Bôcher

1876年，美國第一個研究型大學約翰霍普金斯大學正式成立。一年後，他們聘請英國著名數學家Sylvester來領導一個以研究為導向的數學系。依照歐洲模式，約翰霍普金斯大學堅持教師和學生的研究應盡可能在重要的期刊上發表。事實上，Sylvester與William Story、Simon Newcomb、Charles Peirce等人出版了美國第一個重要的數學研究期刊*American Journal of Mathematics*，其目標在於出版原創數學研究。儘管1883年Sylvester離開約翰霍普金斯，前往牛津大學任教，但他關於訓練研究生與研究的想法被轉移到其他大學，如哈佛、普林斯頓、耶魯等。

William Story



Simon Newcomb

Charles Sanders Peirce

當時最受矚目的是芝加哥大學數學系，由Eliakim H. Moore擔任系主任。1885年，Moore在耶魯獲得博士學位，並到德國訪問一年。Moore訓練出幾位重要的數學家：George D. Birkhoff、Leonard E. Dickson和Oswald Veblen。這些學生為哈佛、芝加哥、普林斯頓注入深刻的影響。許多人相信Moore是「主要的驅動力，最後將美國從數學荒原轉變成數學領域的領導者」（引自Karen Parshall的專著）。約翰霍普金斯和芝加哥都強調，他們的教授不但做研究，並且也教育學生要做相同的事，這樣的態度導致美國數學界在二十世紀之交的明顯提升。

George D. Birkhoff

Leonard E. Dickson

Oswald Veblen

由於兩位年輕教授Osgood和Bôcher的出現，哈佛數學系很快提高了它的國際聲譽。在1903年前80位美國數學家的排名裡，Osgoode和Bôcher排在前四名，另兩位是Moore和George William Hill（他曾與B. Peirce在麻州劍橋的航海年鑑局（Nautical Almanac Office）中共事）。有趣的是，當Osgood和Bôcher還是大學部學生時，都曾經到哥廷根去跟Felix Klein學習，時間分別是兩年與三年。Klein對美國數學的發展有很深的影響。他的學生Frank Nelson Cole就是Osgood和Bôcher的哈佛導師。（特別的是，Klein有六位學生，包括Osgood和Bôcher，都曾經擔任美國數學學會的主席）。

E. H. Moore

Felix Klein

Frank Nelson Cole

Osgood在德國埃爾朗根大學，由Max Noether指導得到博士學位，並且做了函數論方面的重要研究，其中包括證明Riemann映射定理。Bôcher的論文則是跟Klein做的，他在那兒研究勢論（potential theory），後來並解明Fourier級數中的Gibbs現象。Bôcher培育了許多學生，並且在1908年到1914年擔任*Annals of Mathematics*的主編。他同時也是*Transactions of the American Mathematical Society*的創刊人，並且在Moore之後，擔任該刊的第二任主編達五年。Bôcher和Osgood留下了足以自豪的成就：他們為美國數學界打下了分析領域的堅實基礎。經由他們的努力，哈佛數學系不僅是美國最好的數學系之一，即使與歐洲最佳的數學系相比，也毫不遜色。

埃爾朗根大學

Max Noether

三 Birkhoff的崛起

George David Birkhoff的大學部是在哈佛唸的，在此期間他深受Bôcher的影響。接著他到芝加哥大學，在Moore的指導下取得博士學位。哈佛在1910年時提供他教職，但他回絕了，選擇去普林斯頓。兩年後，他改變心意，於1912年回到哈佛任教。

George David Birkhoff

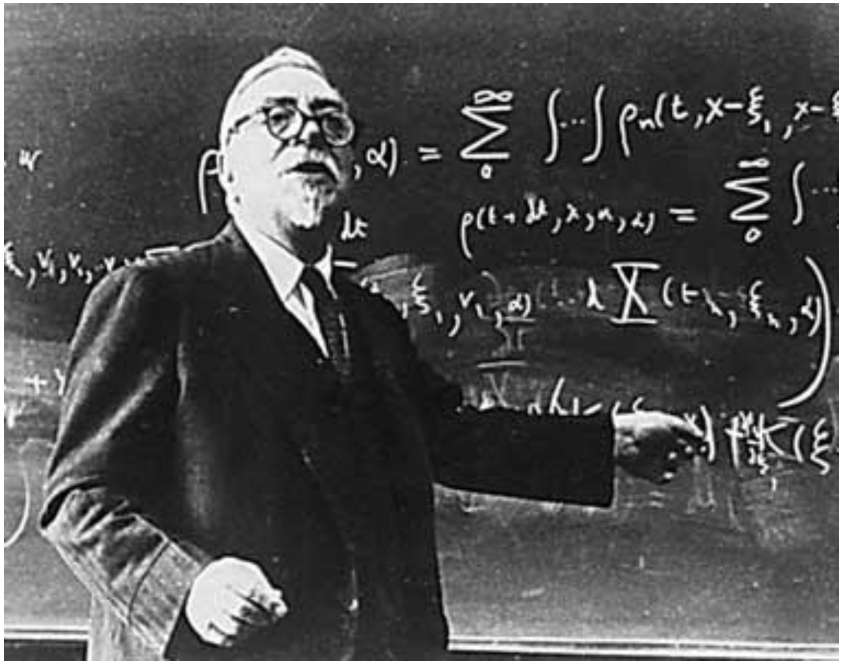
Birkhoff代表了下一代、完全在美國受教育的學者。他的數學才能聞名全世界，證明了即使不去歐洲，也可以得到世界級的數學教育。他和其他一些由美國大學栽培的優秀數學家，都充分具備了將來能夠領導學術領域和數學系所的能力。美國本土的數學根基已在形成，從而完成了Peirce生前未能實現的夢想。Birkhoff以及他同時代的數學家，將會證明重要的定理，做出許多卓越的貢獻。

Birkhoff的重大成就多不勝數，首先是他關於有限制條件三體問題的著名研究。這是Henri Poincaré在1912年去世前想解決的問題，結果Birkhoff在Poincaré去世後三個月內解決了這個問題，不過，Birkhoff告訴他的學生Marshall Stone，做這個問題，讓他體重減輕了三十磅。這個證明成為將分析學的存在性證明連結到拓樸不動點定理的首例。

Henri Poincaré

Marshall Stone

麻省理工學院的知名數學家Norbert Wiener，把Birkhoff比喻為「出現在哈佛數學蒼穹上的璀燦明星。……更獨特的是，Birkhoff的研究全是在美國完成，並未受益於任何國外的訓練。」Birkhoff標誌了美國數學成熟期的起點。他直到1926年才造訪歐洲，當時距他開始在哈佛教書已有14年。



Norbert Wiener

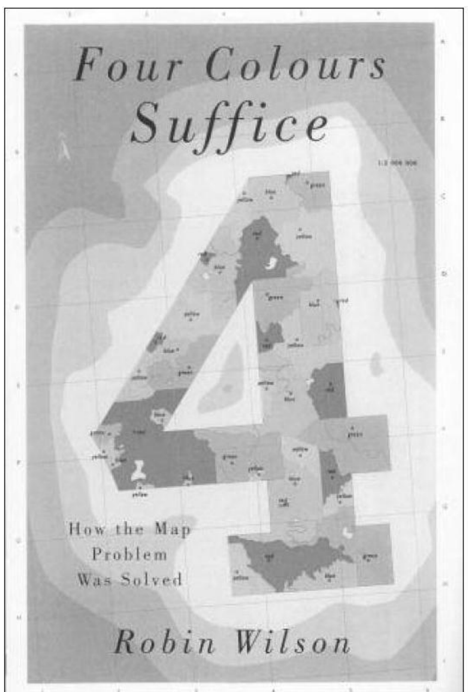
附帶一提，Wiener在1913年從哈佛大學得到博士學位，正是Birkhoff回到哈佛的第二年。Wiener是一位年輕的天才，改變了機率和資訊論的面貌。但他極不善於待人接物，無法和系上每個人相處融洽。他轉到麻省理工或許對數學界是最好的結果，因為在那裡他能夠更自由的鑽研應用數學，並且對工程科學的基礎做出巨大貢獻。

麻省理工學院

Birkhoff的眾多成就使得他成為20世紀最偉大的數學家之一。他在廣義動力系統的工作為他贏得了首屆的 Bôcher獎。1927年，Birkhoff出版了經典著作《動力系統》(*Dynamical Systems*)。它把動力系統的架構遠遠擴展到星球軌道的課題之外。該書包含了許多創見，不過並未包含他在這個主題上最重要的貢獻：遍歷性定理（ergodic theorem）。Wiener稱讚Birkhoff的遍歷性定理是一項精心力作；「遍歷性假設的正確表述及其定理的證明，是美國數學界、乃至全球數學界，近來的最重要成就之一，這兩者都是由Birkhoff完成的。」這個卓越的定理可以上溯到Maxwell和Ludwig Boltzmann試圖建構氣體動力論的努力。

Ludwig Boltzmann

Birkhoff是第一位數學家，把變分學的極大極小論證，用在與球面拓樸等價的曲面上，得出不無聊的簡單封閉測地線。這可以視為是威力強大的Morse理論的起點。創造這個理論的Marston Morse正是Birkhoff的學生。Birkhoff對廣義相對論也有重要貢獻，他證明了一個（和黑洞有關的）定理，說愛因斯坦方程只有一個球對稱的解。他還提供了解決四色問題的重要工具，這個數學名題在60年後的1976年才由Kenneth Appel和Wolfgang Haken解出。




Kenneth Appel and Wofgang Haken in the 1970s

Wolfgang Haken, Robin Wilson & Kenneth Appel in October2002

除了數學成就之外，Birkhoff還指導了46名博士生，迄今為止，出自他門下的數學家已超過7300名。他有四名學生日後成為美國數學會的主席：Stone、Joseph Walsh、Charles Morrey和Morse。他的學生又再栽培出許多優秀數學家。例如，Walsh在取得博士學位後留在哈佛，帶出了31名學生，其中包括Lynn Loomis和Joseph Doob。Birkhoff有三位門生—Morse、Hassler Whitney和Stone—獲得國家科學獎章。他的其他許多學生都有卓越的數學貢獻，並且在哈佛或是美國的其他系所成為領導人。

Joseph Walsh

Charles Morrey

Joseph Doob

Hassler Whitney

四 分析、代數與拓樸的相遇：Morse、Whitney和Mac Lane

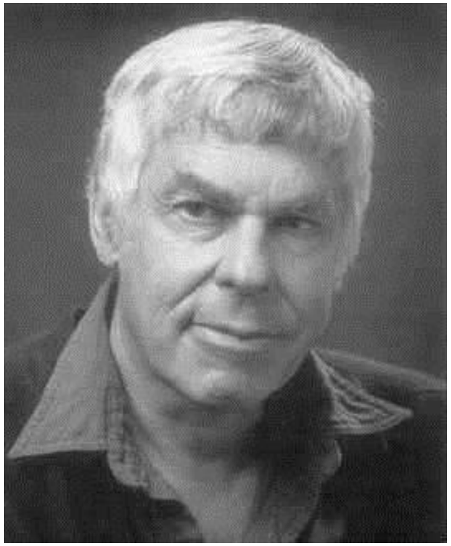
Marston Morse是Birkhoff的博士生，他的論文題目是關於如何建立分析與拓樸的關聯，這是一個已由Riemann、Poincaré和Birkhoff奠立的傳統。Morse特別感興趣的是函數達到極大值、極小值或某種平穩值的（臨界）點。這屬於古典變分學的一部分，其歷史可以回溯至Euler，乃至Fermat。Birkhoff已用它來證明與球面同胚的閉曲面上的封閉測地線的存在性定理。但Morse更進一步把臨界點的存在性連結到該函數定義空間的拓樸性質。他的方法在現代拓樸學有深刻的用途，因此被稱為Morse理論。

Leonhard Euler

Pierre de Fermat

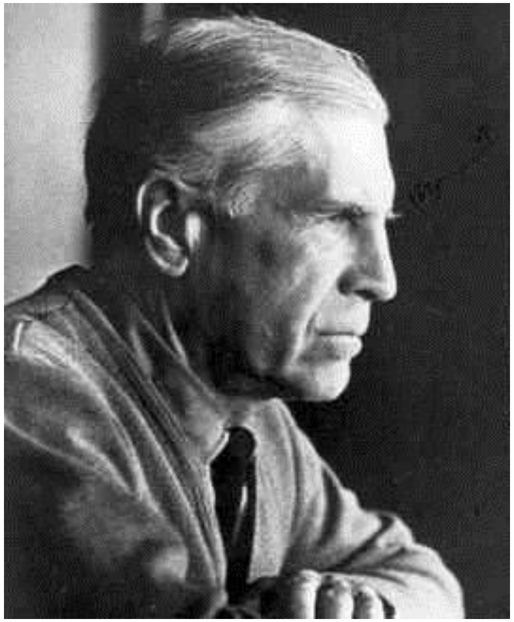
在Morse及其追隨者Raoul Bott、Stephen Smale等人手中，Morse理論成為研究微分拓樸的基本工具。一些重要的方法，像Smale發展出來的柄把空間分解（handle-body decomposition），是根據Morse理論而來的。Smale是Bott的學生。四維以上的Poincaré猜想即是用Morse理論解決的。

Raoul Bot

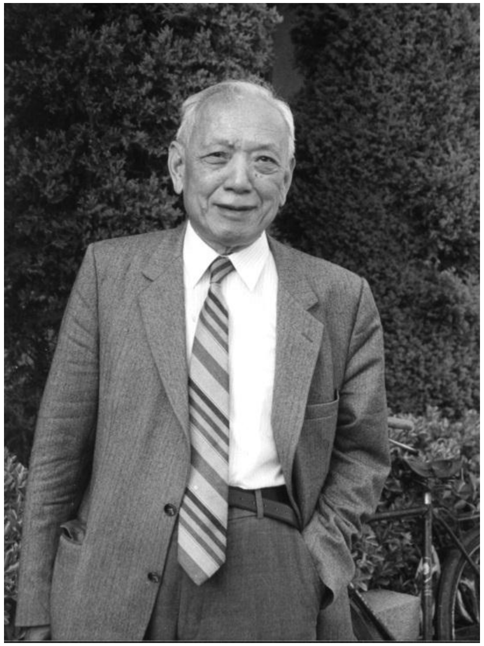


Stephen Smale

Hassler Whitney也是Birkhoff的學生，他發展了把流形浸入歐氏空間的理論。流形上的向量叢，即是由此研究衍生的課題。特別是，Whitney引入了向量叢的Stiefel-Whitney類。這種示性類的想法，又被Pontryagin和陳省身進一步發展。



Lev Pontryagin

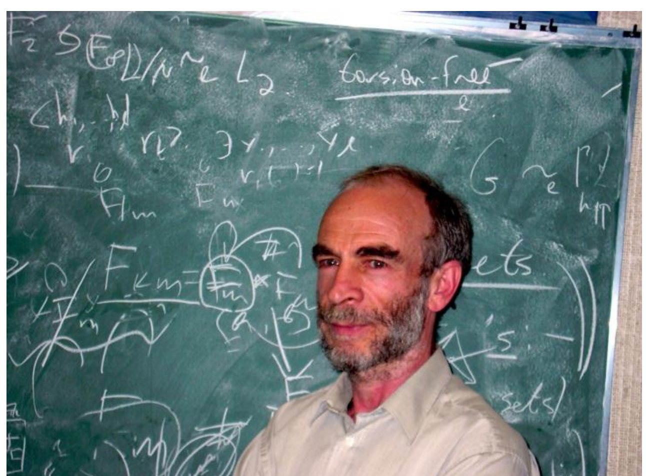


陳省身

示性類和纖維叢的理論協助奠立了現代幾何和拓樸的礎石。它是規範場論的基礎，規範場論是用於描述所有粒子基本作用力的理論。在發展示性類理論的過程中，Whitney也引入了上同調理論，這是現代拓樸和代數的基本觀念。（James W. Alexander獨立發明了上同調的觀念。）

James W. Alexander

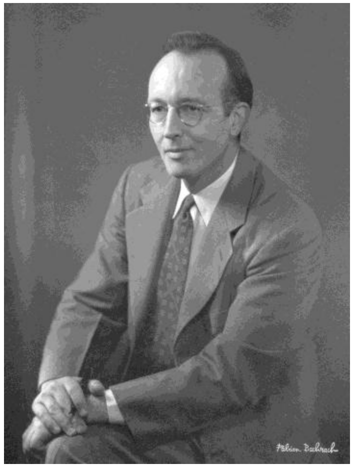
我任職普林斯頓高等研究院時遇見Whitney，他那時顯得相當孤單。他跟我說，他是我在柏克萊的老師Morrey的好友。Morrey也是Birkhoff的學生，他是偏微分方程現代非線性理論的創始人。Morrey的一項知名成果是1949年時解決Plateau問題—他證明三維空間中的任何閉曲線，如果符合適當條件，就會是某肥皂膜的邊界。受到Plateau問題的啟發，Morrey向Whitney請教：可以浸入平面的閉曲線該如何分類？Whitney告訴我，他把Morrey的問題當成挑戰。Whitney的方法又在Smale手中得到進一步發展。這個理論的最廣義形式現在被Mikhail Gromov稱為h原理，據他所云，這理論具有廣泛的用途。



Mikhail Gromov

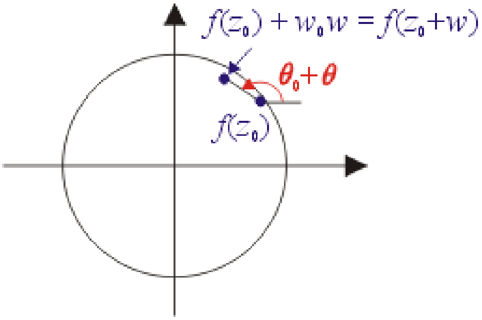
Saunders Mac Lane不是哈佛的畢業生，他是在哥廷根受Hermann Weyl指導的學生。當William Caspar Graustein當哈佛系主任時，Mac Lane接受了Peirce講師的教職。他在哈佛待到1947年，然後轉到芝加哥大學。他和Samuel Eilenberg合作，把拓樸和代數這兩門重要的數學分支融合成一門兩者緊密結合的新學問；他們一起發展出同調理論的公設化研究理路；建構了在同倫理論計算中非常重要的Eilenberg-MacLane空間。這些想法也引發了代數和群論的重大發展。

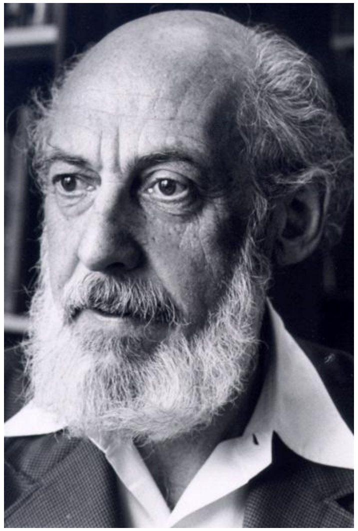
Hermann Weyl



Saunders Mac Lane

$$n[q] = \int \frac{d^3k}{24\,p^2} e^{mnr}\,\mathrm{tr}[(q^{-1}\partial_m q)\,(q^{-1}\partial_n q)\,(q^{-1}\partial_r q)],$$





Samuel Eilenberg

V. 複分析與幾何

芬蘭人Lars Ahlfors 1907年出生於赫爾辛基，他是第一個在哈佛數學系獲得終身教職的歐洲數學家。當加入哈佛時，他已經是第一流的國際明星。他在1936年，與麻省理工的Jesse Douglas共同獲得第一屆的費爾茲獎。Ahlfors後來還獲得沃爾夫獎

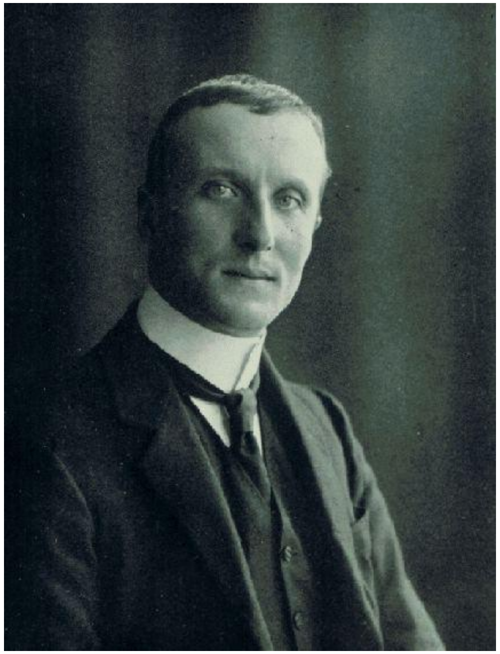
赫爾辛基

Lars Ahlfors

Jesse Douglas

1935年時，在Constantin Caratheodory的大力推薦之下，Graustein提供給他為期三年的客座講師職。他最後在1946年加入數學系，1977年退休。Ahlfors是繼19世紀德國數學家Riemann之後，又一個複分析領域（特別是從幾何角度來探討）的偉大開拓者。

Bernhard Riemann

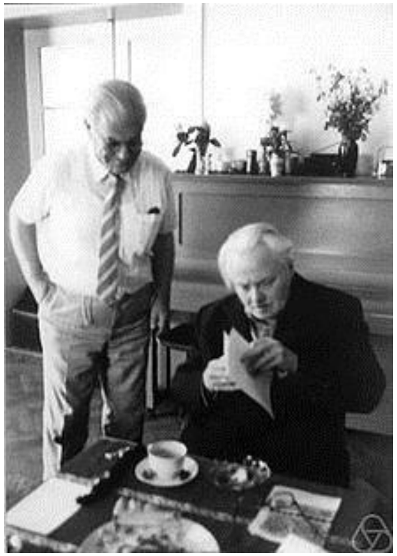


Constantin Caratheodory

Ahlfors是芬蘭大數學家Rolf Nevanlinna的弟子，後者帶他認識了Denjoy猜想，這是一個關於複平面上全純函數漸近行為的著名猜想。Ahlfors在1930年解決這個問題。約略同時，瑞典數學家Arne Beurling在巴拿馬獵鱷魚時，也獨立提出他的證明。（Beurling在1948至1949年任教於哈佛，然後去了普林斯頓的高等研究院。）Ahlfors還曾提到：「我不知道德國數學家Grötzsch已經發表了數篇和我想法類似的論文。」Beurling成為他畢生的摯友和競爭者，而Ahlfors也把Herbert Grötzsch的一些想法運用到準保角（quasi-conformal）映射的研究上。

Rolf Nevanlinna

Arne Beurling



Herbert Grötzsch (right)

Ahlfors創立並且觸及複分析的每一面向，大部分是從幾何的角度。他在證明Denjoy猜想時，已經研究了保角映射中長度和面積的扭曲。他廣泛的發展這些幾何想法，然後將成果總結成一篇名為〈覆蓋空間的主定理〉（Zur Theorie der Überlagerungsflächen）的論文，於1935年發表在*Acta Mathematica*。這篇論文為他在次年贏得費爾茲獎。關於這面獎牌有個逸聞：1944年，當Ahlfors需要籌集從瑞典到瑞士的旅費，他把獎牌送進了當鋪（後來經由幾位瑞典友人的協助，獎牌被贖了回來）。在1939至1940年芬蘭冬季戰爭期間，他花了大量時間躲在防空掩體裡，撰寫一篇名為〈半純曲線論〉（The Theory of Meromorphic Curves）的專題論文，該文以非常幾何的方式，把Nevanlinna的理論推廣到多維空間中的複曲線。



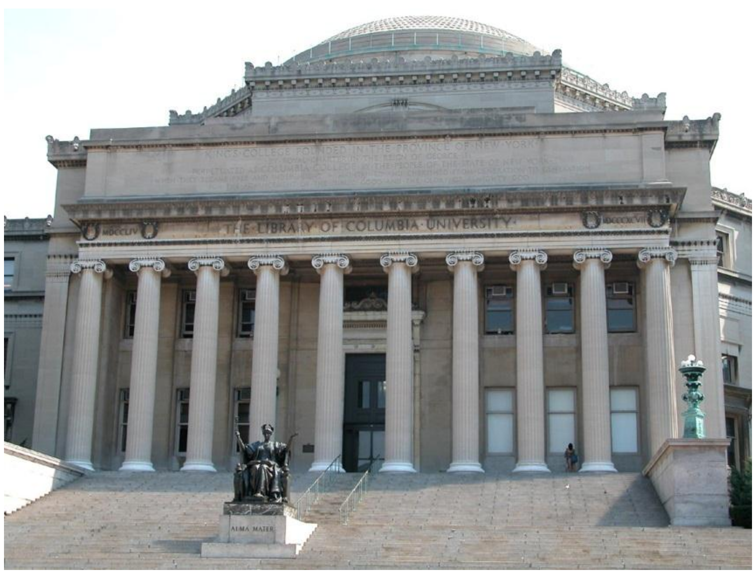
我的老師陳省身，在Ahlfors這篇論文發表四十年後，曾予以透澈研究。事實上，Ahlfors透過Riemann面的幾何，給出了Schwarz引理的完美詮釋。它展示出負曲率如何有助於控制全純映射的行為。Ahlfors的這項原理激發了近五十年來高維複分析的發展。

Ahlfors在極值長度（extremal length）、準保角映射、Riemann面模空間、Klein群等主題的研究，開啟了現代複分析的新地平線。

六 大戰餘波：Gleason、Mackey以及Hilbert空間

二次大戰時，由於教師參軍或自願投入研發支援同盟國，哈佛數學系大幅縮減。例如Stone擔任美國數學學會的戰爭政策委員會主席；Walsh應召入伍進入海軍；Coolidge在七十歲的高齡還從退休重返教職，替正在保衛國家的教授同僚教微積分。

Mac Lane則領導以哥倫比亞大學為本營的應用數學群，專門研究戰爭相關的問題。成員包括哈佛的拓樸學家Whitney；擔任Peirce講師的Irving Kaplansky，他原來是Mac Lane的博士生；另外還有哈佛講師George Mackey，他是Stone以前的學生。

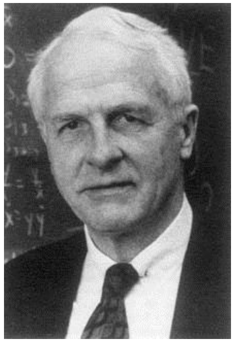


哥倫比亞大學

Irving Kaplansky

George Mackey

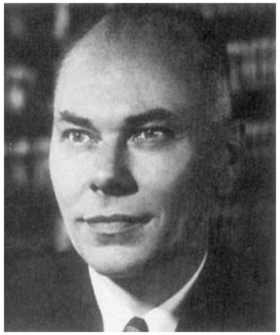
Garrett Birkhoff（G. D. Birkhoff的兒子）和Loomis以及麻省理工學院的Norman Levinson合作，預測空中發射魚雷的水底軌跡。他也和Morse與John von Neumann加入一個委員會，分析如何促進防空砲彈的效用，以及穿射坦克裝甲的問題。戰後，Garrett Birkhoff開始探索混合純數與應數的數學問題。G. D. Birkhoff則為哈佛的Howard Aiken尋找資金，建造當時世界上最大、威力最強的計算器—哈佛馬克1號，用來做射擊彈道的計算，後來也為曼哈頓計畫作計算。



Garrett Birkhoff

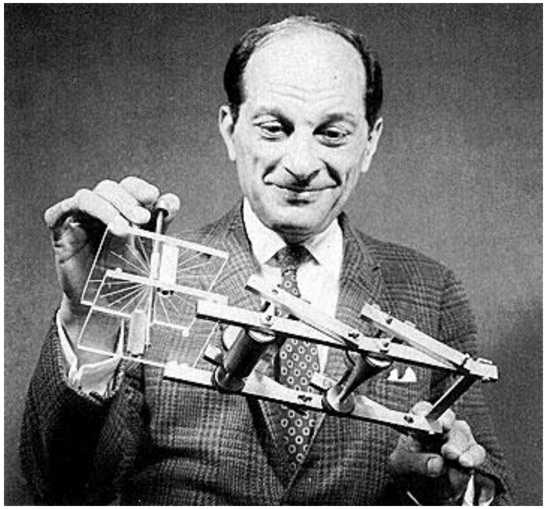
Norman Levinson

John von Neumann



Howard Aiken

Stanislaw Ulam在1936至1940年成為哈佛學會（Harvard Society of Fellows）的年輕學者與數學系講師。他後來加入曼哈頓計畫負責繁複的數值計算，幫助設計出第一顆原子彈。Ulam後來發明蒙地卡羅法，以統計方法來解決數學問題。他也是發展氫彈的關鍵人物。物理學家Edward Teller曾經這樣評價Ulam：在真正危急的時候，數學家仍然勝出，只要他真的很好的話。

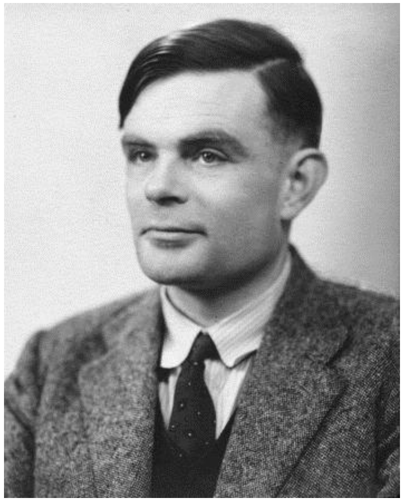


Stanislaw Ulam

Edward Teller

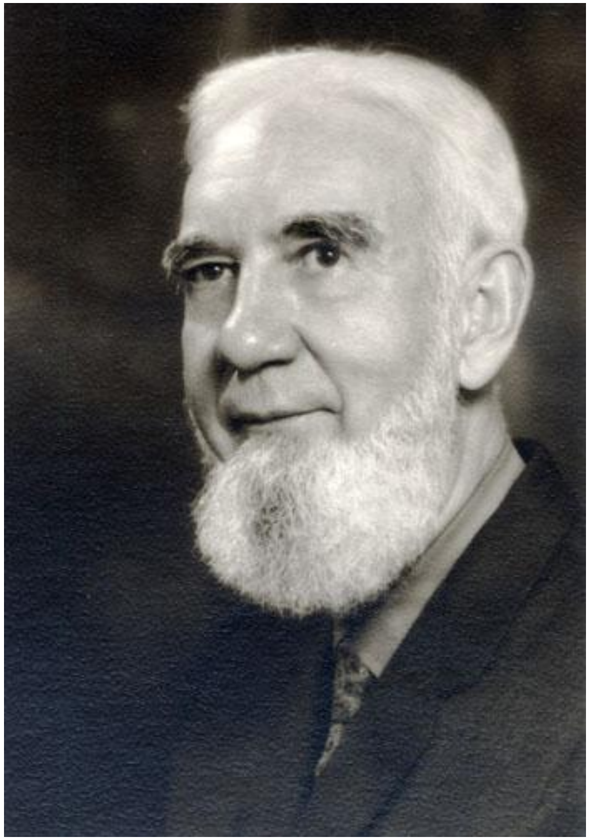
Andrew Gleason是耶魯的大學生，1942年畢業之後旋即加入位於華盛頓特區的海軍密碼分析小組。他曾協助破解日軍的密碼，偉大的計算機科學家Turing盛讚他的研究聰穎。1946年Gleason離開海軍，先成為哈佛學院的年輕教師，後來成為數學系的教授直到退休。一直到1990年為止，他一直都是政府情報體系的顧問。他引入了許多分析密碼的重要數學技術，結合了他的編碼理論研究與龐大的純數學課題研究。

Andrew Gleason



Alan Turing

Gleason非常著迷於Ramsey理論，這是一門和數算東西、尋找秩序有關的理論，可以從似乎無秩序的結構中找出有組織的子結構。他和Robert Greenwood算出R(4, 4)等於18，也就是說你必須找到18個人，才能確保其中至少有4個人完全不認識對方，或是彼此都認識。



Robert Greenwood

不過Gleason最知名的工作是Hilbert第五問題。這個問題屬於1900年Hilbert在巴黎世界數學家大會所提出的23個問題。第五問題是局部歐氏群是否必然是李群。許多偉大的拓樸學家都曾經試圖解決這個問題但卻都失敗。Gleason為這個問題做出最關鍵的貢獻，最後才由高等研究院的Deane Montgomery與紐約城市大學皇后學院的Leo Zippin聯合解決。

Deane Montgomery

Leo Zippin

Gleason並沒有博士學位，他自認Mackey是他的恩師。Mackey是現代群表現論的鑄造者，他也在量子物理基礎上有重要貢獻。Mackey對他的指導教授Stone與von Neumann所構築的理論很感興趣，這項理論試圖解釋Heisenberg的測不準原理，也就是一個粒子的位置測量精確度與其動量測量精確度成反比。Mackey可以將Stone-von Neumann的理論擺置在一個廣義的數學脈絡中。Andre Weil隨後注意到Mackey理論中的特例，和數論中的一些深刻理論很有關係。

Andre Weil

Mackey對於Max Born法則很感興趣，亦即在某時某地找到一物的機率密度等於其波函數絕對值的平方。Von Neumann與Mackey想要從第一原理出發，說明以單位向量表示狀態是數學上可證明的。由於Von Neumann用的一些公設約束性太大，Mackey想要移除它們。Mackay重新將這個問題用精準的數學形式來呈現，寫成一個猜想。Gleason被這個猜想所激勵，投入研究最後證明它。

Max Born

Mackey的表現論著重於酉表現（ unitary representation ），他以導出表現（induced representation ）為基礎，發展了所謂的「Mackey 機器」。這個理論在包括量子物理與數論的幾項主題的發展上有很深刻的影響。

七 歐洲人：Zariski、Brauer與Bott

二次大戰之後，有好幾位一流歐洲數學家加入哈佛數學系的陣容。除了 Ahlfors(1946)之外，還有Oscar Zariski (1947)、Richard Brauer (1952)和Raoul Bott (1959)。每一位都對這個系以及他們的專長領域造成巨大的影響，這些領域主要分別是代數幾何、群論和拓樸。

Oscar Zariski

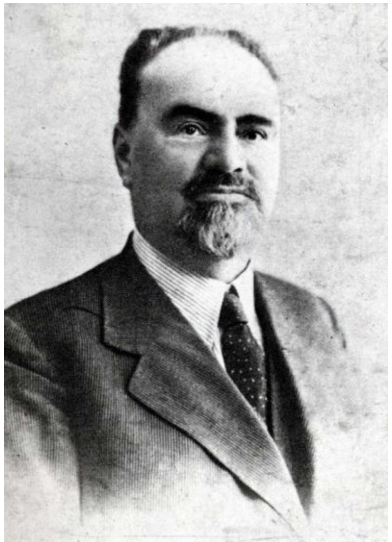
Richard Brauer

Raoul Bott

雖然Zariski是第一位在哈佛數學系拿到終身教職的猶太人，他在數學上的宏大衝擊和宗教信仰並無關係（事實上他自認是無神論者）。Zariski和Weil重新整頓了代數幾何，將它置於比從前更堅實、也更代數的基礎之上，他們形塑了代數幾何領域的日後發展，為未來幾十年的進步奠下基石。

1899年Zariski出生於俄羅斯的科布林，1918年就讀於基輔大學。他在當時的俄國革命中受傷，離開俄羅斯到羅馬薩皮恩札大學讀書，當時這裡是研究代數幾何的世界中心，教師陣容中有三位偉大的代數幾何家：Guido Castelnuovo、Federigo Enriques與Francesco Severi。他們就是（義大利）古典代數幾何的象徵與本尊。代數幾何是一個以各種方式結合代數與幾何的領域，運用代數技巧來解決幾何問題。

Guido Castelnuovo



Federigo Enriques

Francesco Severi

Zariski在羅馬待了三年，並深深受到義大利幾何學家的影響。不過Castelnuovo卻告訴他：「你雖然在這兒和我們一起，卻不是我們的一員。」Castelnuovo此言並非斥責，而是一種敦厚的善意，因為Castelnuovo曾告訴Zariski，義大利學派的方法已經窮竭所有可能，走到盡頭，不適合再往前發展。後來Zariski發現發現義大利學派的代數幾何「基礎搖晃不安。」他需要修正Severi的證明，但Severi卻說：「我們貴族是不做證明的，證明是你們庶民的事。」Zariski將代數幾何基礎的重建視為己任，並在抵達美國之後才完成。

Castelnuovo和Severi鼓勵Zariski去研究Solomon Lefschetz新穎的拓樸研究，他接受這項建議，並透過Lefschetz協助找到工作，1927年成為約翰霍普金斯的研究員，一年之後就升任副教授。Zariski在約翰霍普金斯任職大約20年後，成為哈佛的一員。

Solomon Lefschetz

約翰霍普金斯大學

約翰霍普金斯大學

在這段期間，Zariski決定從嶄新的角度探索代數幾何，1935年，他出版《代數曲面》，在二維曲面上實踐他的新觀點。事實上，Zariski重建了代數幾何的基礎，而他所使用的語言是現代的交換代數，這是他1934至1935年在普林斯頓高等研究院，從Emmy Noether那裡學到的。

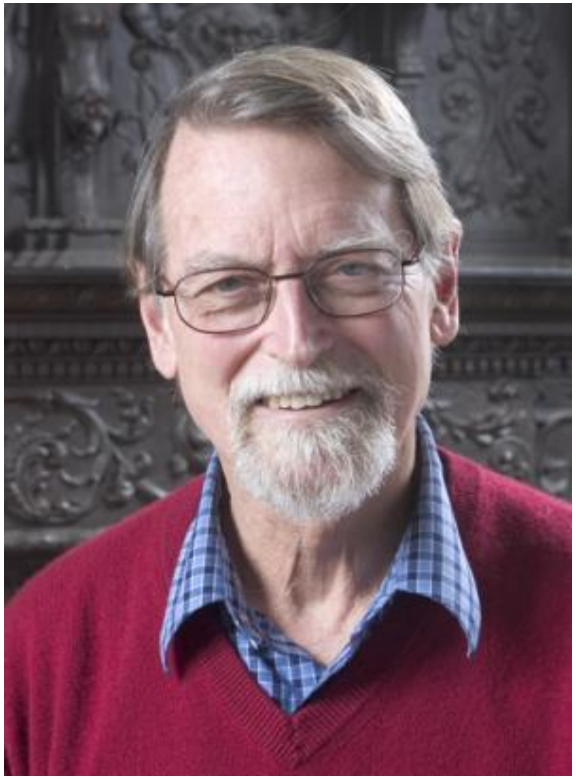
Emmy Noether

在1937年，Zariski曾說：「我的研究特性經歷了劇烈的改變，不論是使用的方法或是問題的敘述方式，其特徵都益發代數取向。」 但是他也補充說：「純粹形式的代數或形式數學並非我天生的性向，我和真實的生活也有非常多的接觸，那就是幾何學，幾何才是真實的生活。」

關於這個新的代數取徑，Zariski的博士生廣中平祐（Heisuke Hironaka）說，一旦證明是以代數為基礎，嚴格性就是自然的結果，這也幫忙數學家處理那些無法眼見的高維度形體。這個想法對Weil和Zariski發展以任意體為基之幾何也極為重要，也就是說他們所處理的代數空間並不只限於實數或複數坐標。其中最奇特的是有限體的代數解形（variety），事後證明這對現代數論非常重要。

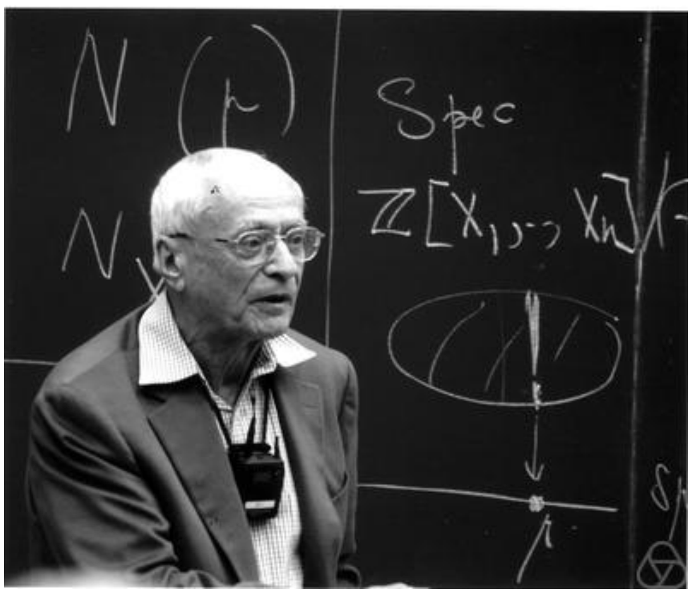
Heisuke Hironaka 広中 平祐

1940年，在Birkhoff的強力推薦下，哈佛準備提供Zariski終身教職，填補剛退休的Coolidge與1941年初Graustein過世所留下的空缺。於是，該年Zariski到哈佛訪問一年。不幸的是，由於日本轟炸珍珠港，大學當局凍結了教職，Zariski只能回約翰霍普金斯大學擔任教學吃重的職務。不過在這段期間，Zariski證明了他知名的「主定理」以及連通性定理。根據他的博士生David Mumford所言，他運用代數中的基進概念，並萃取了幾何的內涵。這正是Zariski長久努力為代數幾何奠基研究的一環。整體而言，Zariski成功撐起代數幾何基礎的成就，也許比他證明的任一個別定理都還更重要。

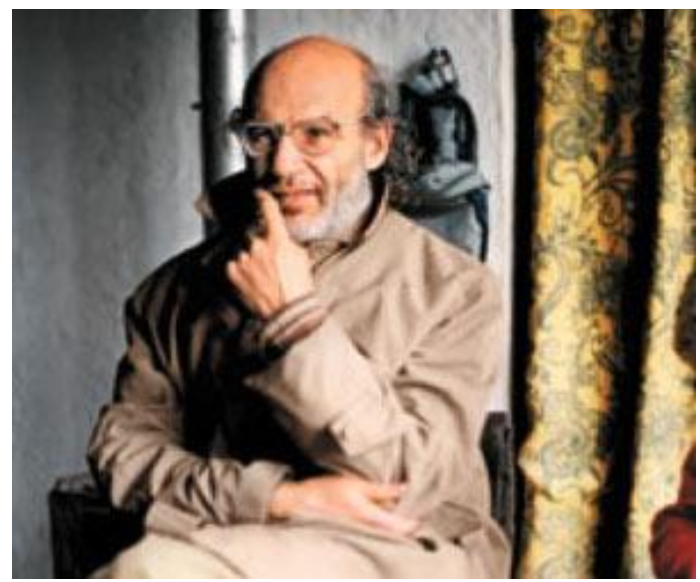


David Mumford

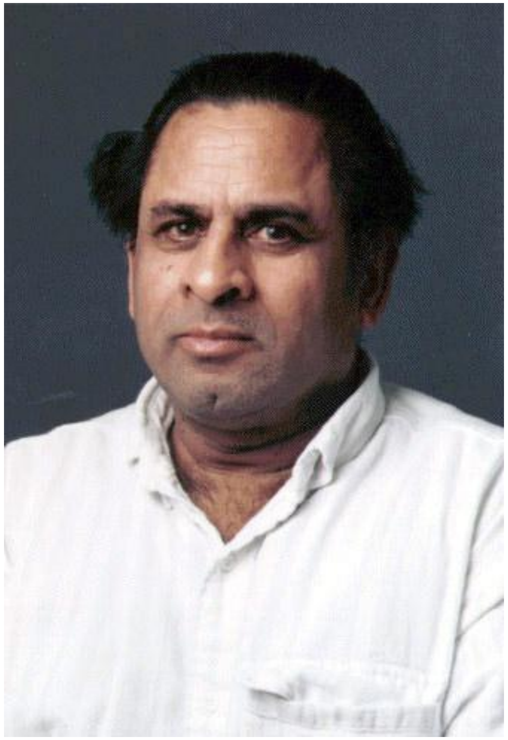
Zariski在1947年終於成為哈佛教席的一員，他讓哈佛在接續而來的三十年中，成為代數幾何的世界中心，就像幾十年前的羅馬大學一樣。Zariski將頂尖的學者帶進哈佛，他推動關鍵的教席任命，邀請明星級的訪問學者如Jean Pierre Serre與Alexander Grothendieck，並且以他研究的高度與個人魅力，吸引了一批優秀的研究生。



Jean Pierre Serre

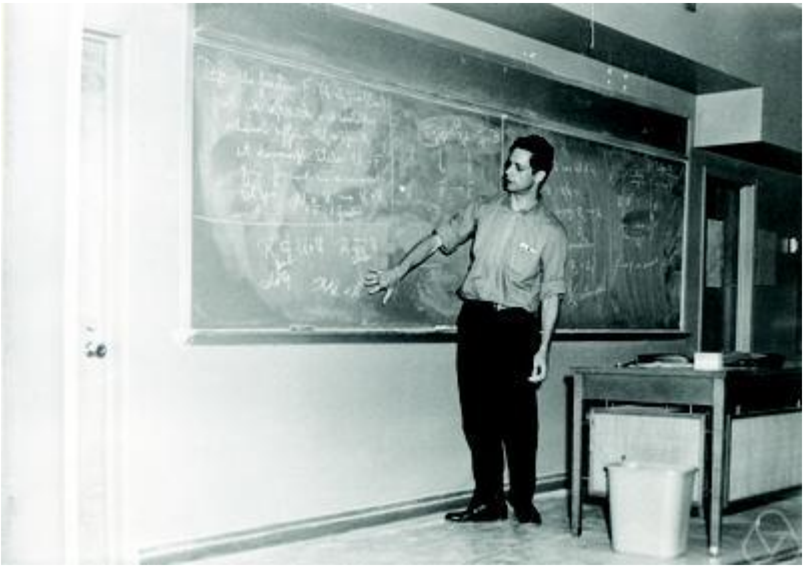

Alexander Grothendieck

Zariski在四十年代的重要數學成就，是關於代數曲線與代數曲面奇點的解消（resolution），這導致數十年後，1964年廣中平祐所有維度奇點解消的偉大定理，他另一位學生Shreeram Abhyankar在1956年解決了有限體代數流形（不超過二維）的解消問題，約十年後，Abhyankar又解決了三維的情況。



Shreeram Abhyankar

除了廣中平祐與Abhayankar之外，Zariski所訓練的傑出學生還有Mumford與Michael Artin，Zariski學生的整體成就改變了整個代數幾何的主題。今天關於代數幾何最核心的部分，大多得歸功於這一群數學家。

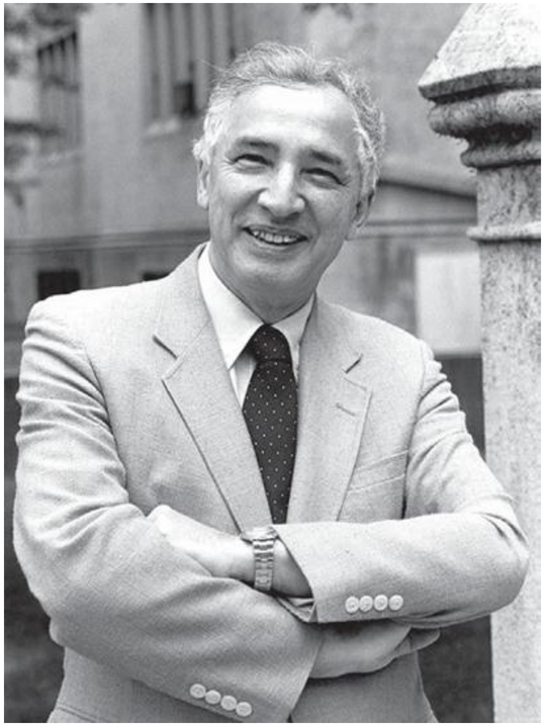


Michael Artin

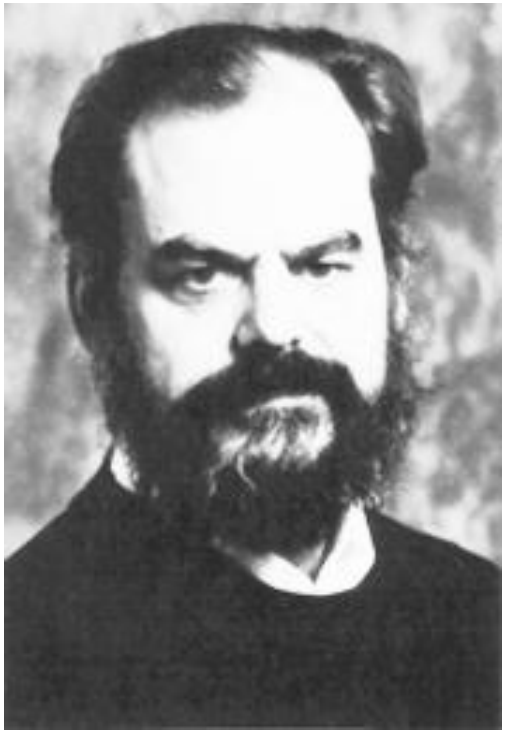
Richard Brauer在他職業生涯的中期來到哈佛，當時他的整體成就已經令人印象深刻，但是此後他還有更多的成果。他是Issai Schur 在柏林大學的學生，博士論文的主題是群表現。1933年，他離開德國，在高等研究院待了一段時間，1934至1935年成為大數學家Weyl的助理，隨後在經歷多倫多大學與密西根大學的教職後，加入哈佛的教席。在多倫多時，Brauer投入有限群及其群表現的研究，在這個主題裡，他獲得許多優異的成就，並結合成一個宏大的理論：有限單群的分類，這是所有有限群的基礎。他在1955年的論文〈偶數階的群〉中提出一個分類單群的策略，後來被稱為「Brauer綱領」。

Issai Schur

Walter Feit說是Brauer踏出關鍵的第一步，才讓他們有可能證明出知名的Feit-Thompson定理：「所有奇數階有限群都是可解的。」John G. Thompson因為這個定理獲得費爾茲獎。



Walter Feit

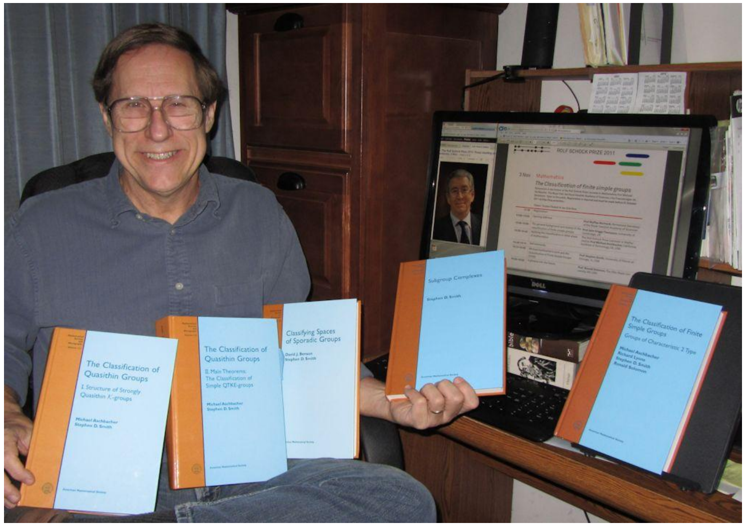


John G. Thompson

1972年，Zariski的另一個學生Daniel Gorenstein提出一個16步驟的綱領，試圖證明所有有限單群若不隸屬於18族群，就只屬於例外的26種「異散群」（sporadic groups）。這個綱領的最後一塊拼圖，是一篇長達1200頁的論文，作者是加州理工學院的Michael Aschbacher與伊利諾大學芝加哥校區的Stephen Smith。

Daniel Gorenstein

Michael Aschbacher



Stephen Smith

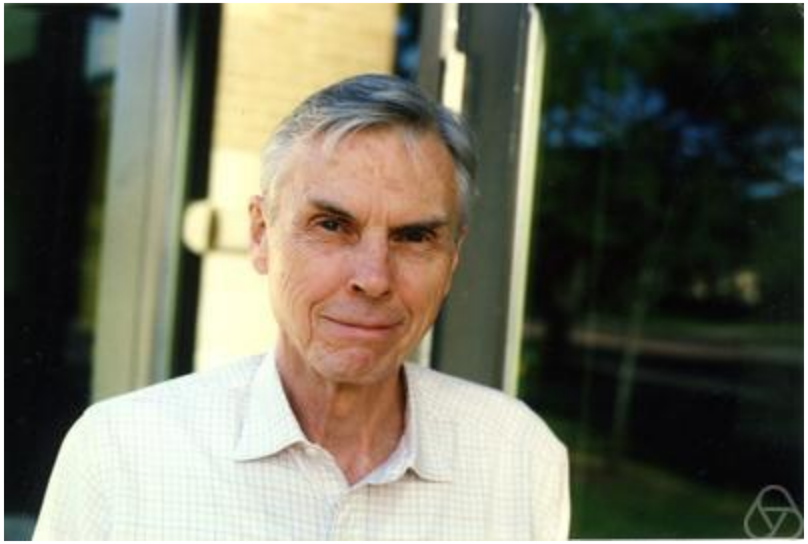
1923年，Raoul Bott生於布達佩斯，他畢業於加拿大麥基爾大學，並在Richard J. Duffin的指導下，在卡內基美侖大學就讀應用數學研究所。他和Duffin解決了電路網理論中一個十分有挑戰性的問題，Weyl十分欣賞這項研究，邀請Bott到普林斯頓高等研究院訪問。在那裡Bott結識了Morse，學習Morse的臨界點理論，並將它推廣到臨界點非孤立的情況。

運用這個推廣的Morse理論，Bott進行了計算李群同倫群的卓越研究，還發現令人意外的現象：他發現當n很大時，SO(n)的同倫群竟然出現週期8的現象。而SU (n)的同倫群則出現週期2。根據Michael Atiyah的說法，Bott這篇1957年的論文是一枚「炸彈」，現在這項定理稱為「Bott週期性定理」。這個發現影響極大，開始了拓樸與幾何一波接一波的發展，尤其是K理論的進展，這是關於向量叢的研究，肇始於Grothendieck、Serre、Atiyah與Friedrich Hirzebruch。這是Bott在他還是密西根大學教授時所完成的工作。

Michael Atiyah

Friedrich Hirzebruch

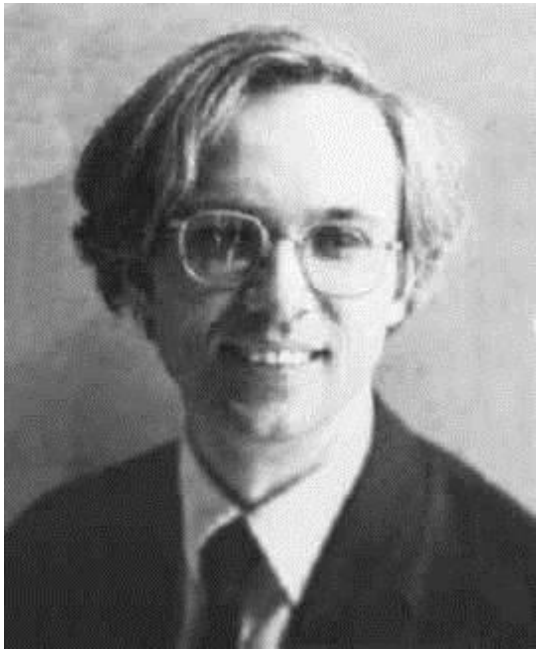
在John Tate的大力推薦下，Bott於1959年來到哈佛就職，系主任Zariski說：「Bott正是讓他感覺無聊沉悶的系可以再度鮮活起來的最佳人選。」Bott在哈佛一直待到他退休為止。



John Tate

Bott其他極具影響力的工作包括了1964年的Atiyah-Bott固定點公式，以及他與Atiyah合作的等變上同調理論（equivariant cohomology）。

Bott對數學社群與數學系的影響遠超出他所發表的論文。他訓練出好幾位傑出的數學家，包括在密西根時期的Smale，哈佛時的Daniel Quillen與Robert McPherson。



Daniel Quillen

Robert McPherson

雇用Ahlfors、Zariski、Brauer、Bott以及隨之而來的其他數學家，哈佛向大洋另一邊的數學家打開大門，更豐富了數學系、數學領域、甚至數學文化的發展。

Bott說過他感謝「這個國家，以崇高的心靈與慷慨的胸懷接受這麼多來自不同海岸的人，不介意我們的口音與其他差異，讓我們能適才適性，竭盡所能。」

八 結論

今天的哈佛數學系和往日一樣優秀，承續著開系先賢的傳統。在2009年的一次晚宴中，Tate宣稱現在是本系的全盛時期。這句話也許略嫌誇張，但是我必須承認，這個系繼承了讓它在過去150年如此偉大的恢弘傳統。

哈佛數學系規模仍然很小，只有18位資深教席。我們依然相信品質是聘任終身教職時最重要的標準，也繼續開放給所有族裔與國籍的傑出數學家，只要他們願意奉獻於研究，並且為哈佛大學訓練出最好的學生。

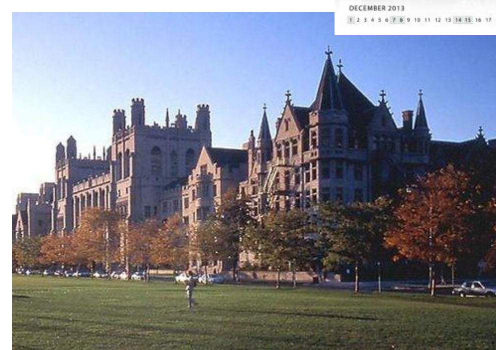
Birkhoff於1912年來到哈佛，從那時開始，在世界上最優秀的心智領導之下，數學系已經發展了100年的高階研究。

回顧這段歷史，再比較其他國家還在奮力發展一流數學研究的大學，我們有下列結論：

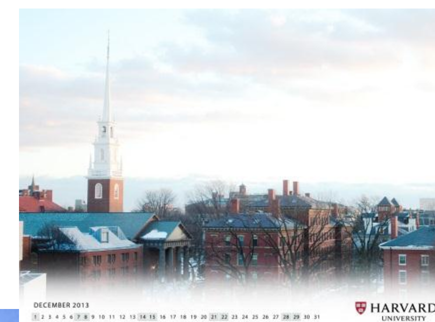
1. 20世紀之交正是美國發展高層科學研究的恰當時機，主要的大學如約翰霍普金斯、耶魯、芝加哥、哈佛都戮力於爭取歐洲最好的學者（例如Sylvester），並盡全力培育最好的學生（如Birkhoff、Whitney、Morse…）。這些努力也受到大學校長（如Eliot）與院長（如Graustein）的強力支持。他們都有極力成為世界上最好大學的遠大願景。

約翰霍普金斯大學

耶魯大學

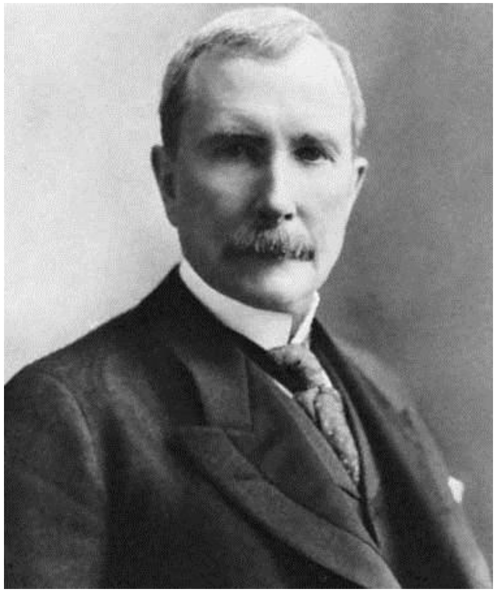


芝加哥大學

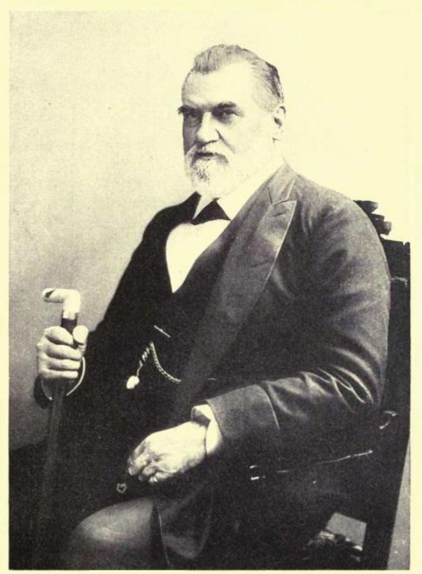


哈佛大學

2. 在十九世紀下半，美國的經濟狀況大有改善，其盛勢持續至今。私人捐贈者捐獻大量的金錢給大學，例如John D. Rockfeller捐給耶魯與芝加哥，Leland Stanford則捐贈他所有的錢財建立了史丹福大學。他們對高等教育的無私態度，舉世無匹。而且這樣的奉獻態度依然保持到今天。



John D. Rockfeller



LELAND STANFORD, ABOUT 1890

Leland Stanford

3. 基於大學所提供的良好環境，以及優秀大學彼此之間的良性競爭（相較於某些新發展國家大學的檯面下競爭），教授與學生於是能奉獻精力於原創性的研究。

我們也能體認到當時研究者研究數學時的強大自信。例如Birkhoff在無人指導的情況下，竟然敢孤身嘗試解決Poincaré留下來的有限制條件三體問題，顯示了當時數學領導者的自信。

Birkhoff不覺得他有需要前往德國跟隨大師學習，自己就開展了許多新穎的領域，也栽培了具有同等創造力的學生。他之所以能完成這份艱難的工作，部分得歸功於哈佛能夠匯聚一批資賦優異的學生，這些哈佛大學部與研究所學生的總體貢獻讓哈佛成為名校，他們跟隨大師學習，開闢自己的領域與研究子題。

4. 這些領導人心胸開闊，願意嘗試新穎的研究方向。從Birkhoff時期一直到今天，哈佛的教師與學生在變換新研究方向時從來不畏縮。因此開拓了很多新領域：現代拓樸學、動力系統、遍歷論、資訊論、非線性偏微分方程、幾何觀點的複變分析、基於代數的代數幾何基礎、群論、數論等等，幾乎包括所有對數學具有根本重要性的領域。

5. 數學系的氣氛非常友善，因此許多絕對一流的訪問學者都能與我們的教授和學生進行交流。在這樣的環境中，新理論逐一誕生，並進而刺激年輕學生繼續向前探索。

6. 儘管資深教師的人數很少，但他們都投入大量努力去教導學生。教師和學生愉快的一起工作，他們以哈佛為榮，願意維護哈佛的崇高名聲。

7. 美國是最大的移民國家，十八世紀前開發東部和南部，獨立戰爭更要聯合法國對付英國在海上的威脅，十九世紀時向西部殖民，充滿冒險開創的作風，影響及於學術。同時多民族的社會鼓勵良性的學術競爭，開國至今，社會大致上兼容並蓄，這在其他國家並不多見。

讓哈佛如此偉大的也許還有其他原因，但我相信以上是最關鍵的因素。