評〈黃金分割也是對稱？〉

● 蕭昌建

一

在《二十一世紀》1992年12月號上，陳之藩教授以〈黃金分割也是對稱？〉為題，論及數學上兩千多年來綿延不絕的一個有趣話題：黃金分割。在概述斐波拉契數列、金字塔、維納斯等若干與黃金分割有關的故事之後，陳之藩教授提出一種數學推演，去探尋黃金分割的魅力的根源。

他把黃金分割數0.618與0.382從十進制數化為二進制數：

0.618（十進位）=0.1001111001（二進位）

0.382（十進位）=0.0110000110（二進位）

他說：「我注視着這二進位表示的黃金分割難免驚異：竟然是如此『對稱』的圖形！」

他指的是：0.618的二進位數如在小數第5位與第6位間樹一鏡面，則左邊與右邊恰成對稱，且0.382的二進位數也有如此特點。

他還在註釋中援引友人沈乃正用電子計算機把0.618的二進位小數算到小數點後402位的結果：

0.618（十進位）

= 0.10'011110001101010011111101111100111011011001000101101000011100101011000000100000110001001001101110100 1'……（二進位）

（原文是402位，此處只列出102位，從第3位開始，是佔100位的循環節。）

他指出，這裏又出現了驚人的對稱：100位的循環節，前50位與後50位恰成互補的對稱，即每個循環節的第K(K≦50)位與第50＋K位的0與1恰好互換。他說，0.618與0.382都表現了這種每一百位循環節的平移對稱和循環節內前50位與後50位間互補的鏡面對稱。

陳之藩教授詳細說明這種對稱後，感到他的發現似乎解釋了黃金分割之謎，他以這樣的設問作為他文章的結尾：「也許華羅庚所宣傳的黃金分割之所以有效與楊振寧的對稱『宗教』或陳省身的數學『實在』有着關

聯？而黃金分割與二進位表示出來時有對稱之美或者有所牽繫？」

二

陳文中娓娓敍來的故事和由此及彼的思考使人感到陳之藩君探尋科學之謎的熱誠。出於一個數學工作者的習慣，在仔細了解了陳文的內容之後，自然就轉向對其論證的分析。我首先把注意集中到陳文立論的核心：二進位數的對稱。

我發現，所有陳文所述的那種對稱性的數組，借助計算機的演算可以舉出許多，例如：

0.952……（十進位）=0.1111001111（二進位）
0.047……（十進位）=0.0000110000（二進位）

0.929……（十進位）=0.1110110111（二進位）
0.070……（十進位）=0.0001001000（二進位）

0.882……（十進位）=0.1110000111（二進位）
0.117……（十進位）=0.0001111000（二進位）

0.870……（十進位）=0.1101111011（二進位）
0.129……（十進位）=0.0010000100（二進位）

0.800……（十進位）=0.1100110011（二進位）
0.199……（十進位）=0.0011001100（二進位）

0.753……（十進位）=0.1100000011（二進位）
0.246……（十進位）=0.0011111100（二進位）

它們的二進位數都和0.618與0.382一樣，具有鏡面對稱性和互補對稱性。

要舉出若干具有100位的循環節、其中前50位與後50位恰成互補的鏡面對稱，且每100位成平移對稱的二進位小數，也並不難，例如：

0.220……（十進位）
= 0.’0011100000111111000000011111110
0000000111111111000000011000111
1000001111110000000011111111000
000000111111’……（二進位）
0.779……（十進位）
= 0.’1100011111000000111111000000001
1111111000000000111111100111000
0111110000000111111100000000111
111111000000’……（二進位）
（上面各例中的……，表示該處還有若干位小數，已被省略。）

事實上，具有這種性質的小數還可以舉出許多許多。

陳之藩君發現的對稱性與黃金分割的獨特性無關。陳文的邏輯錯誤，是把大量存在的一種情況，作為了特殊事物的特殊本質。

從數學上可以嚴格證明：當二進位小數為2M位有限小數時，能有鏡面對稱性的小數個數有2的M次方個（比如取到小數點後十位，這樣的小數有2的5次方個即32個）。當不限制小數位時，有這種性質的小數有無窮多個，且在區間[0, 1]上的任意一個長度不為0的子區間上都有無窮多個具有這種對稱性的數。這就是說，令陳之藩君驚奇不已的這種對稱性，是在任意一個小區間上（比如在[0, 0.1]上，或在[0, 0.01]上，或在[0, 0.001]上，甚至在[0, 0.0000000001]上，等等），都可以找出無窮多個有這種對稱性的數來。有興趣的讀者請閱我在註釋中作出的證明①。

從這些數學結果，我們可以得出這樣的評判：陳之藩君發現的對稱性與黃金分割的獨特性無關。

因為，假如這種對稱性是黃金分割的奇妙性的根源，我們就不得不同時承認：這無窮多個也具有這種對稱性的數，與黃金分割數都有同一樣的

奇妙性。但事實並非如此。陳文的邏輯錯誤，是把大量存在的一種情況，作為了特殊事物的特殊本質。

三

更有戲劇性的是，儘管有無窮多個數都有陳文所述的那種對稱性，但黃金分割數卻恰恰不具有這種對稱性！

而且，更有戲劇性的是，儘管有無窮多個數都有陳文所述的那種對稱性，但黃金分割數卻恰恰不具有這種對稱性！

陳文不是已經算出（甚至用電子計算機算到402位）0.618和0.382具有這種對稱性嗎？這裏怎麼又說黃金分割數不具有這種對稱性？

首先，精確的黃金分割數是$(\sqrt{5}-1)/2$和$(3-\sqrt{5})/2$，它們都是無理數，寫成十進位小數時將是無限不循環的小數（即0.61803400516510……和0.38196599483489……），用二進位數表示時，也將是無限不循環二進位小數。無論你把鏡面放在甚麼位置上，鏡面的一邊是有限位而另一邊是無限位且無限不循環，這就根本不可能有鏡面對稱。

陳文的思考方法一開始就注定了不能解釋黃金分割的本質。因為他把事物本身與表示事物的符號混為一談，試圖用表示一個事物的符號的形狀去解釋這個事物。

其次，即使允許用近似值，那也無濟於事。這近似值可以是0.62和0.38，也可以是0.618和0.382，也可以是0.61803和0.38197，也可以是0.618034和0.381966，等等。再把它們分別表示為二進位小數時（取有限位近似值），有的可能呈鏡面對稱，有的卻不是。我們怎麼可以只從0.618和0.382的情況就去斷言黃金分割有對稱性呢！當許多更精確的近似值都不具有這種對稱性的時候，我們有權在互相對立的兩種情況中只選一種嗎？

這樣，可以更進一步地說，陳文的邏輯錯誤是：把黃金分割不具有的性質，作為了黃金分割的奇妙性的根源。

四

在作了以上的數學分析之後，我們清楚地看到：面對迷人的黃金分割，陳文在驚訝地發現「對稱」時提出他的解釋。這解釋卻又在深入地研究「對稱」時被否定。

這種「對稱」的反叛，是否還有更深刻的原因？

事實上，陳文的思考方法一開始就注定了不能解釋黃金分割的本質。

陳文的根本邏輯錯誤在於：把事物本身與表示事物的符號混為一談，試圖用表示一個事物的符號的形狀去解釋這個事物。

數學工作者已經對「數」和「記數」作了嚴格的區分。十進位表示法寫出的0.618，與二進位表示法寫出的0.1001111001，甚至用中文寫出的零點六一八，都是同一個數的表示。這個數是唯一的，它的本質不因表示法的改變而改變。這些不同的表示各有優劣，但這種優劣不過是相對於使用環境的方便與否或其他技術性的比較而言。比如十進位數在日常生活中使用，就比二進位數方便，而在電子計算機中，二進位數就更易物理實現。現代數學已經嚴格證明：數的有理性、無理性，數的運算規律等等，都不會因採用不同的進位制而有所不同。這正如一個人的性別不會因此人所取的名字如何而改變一樣。當然，更不可能用名字的字體形狀來解釋性別的成因。

請看這樣一個虛擬的故事：

一美國歷史學家來中國探尋華夏文明，他所見的文物古迹使他如醉如痴，他不禁喃喃地說着"China!"，"China!"忽然他眼睛一亮，想到："China"譯成中文是「中國」，而「中」字多麼優美、多麼對稱。於是他奮筆疾書，洋洋萬言，最後冠以標題：「論對稱性乃華夏文明之根」。

當然，沒有這樣的歷史學家，因為其中的問題人人一望即知。但是，陳文的思路與這一模一樣，卻不是一望即知。尤其，當這個問題被科學術語、數學概念、公式及冗長的計算掩蓋時，人的思維被細節所引導，反而忽略了總的精神。

當一個事物有具體的物質形態時，人們易於把它和它的記號分開。當一個事物是抽象的時，人們就常常把它與它的記號混為一談。這種錯誤，是人們思維中最難於躲開的陷阱。因為，對一個抽象的事物，不借助一種表達的記號，人的思想是難於進行的。這就使人容易在不知不覺中把記號等同於所要表示的事物。正是這樣，陳文一開始就掉進了這個思維的陷阱。

五

寫到此，聯想到身邊的一些故事。我在大學唸數學時，儘管是勤於思考的，但就沒有認真思考過數與記數的區別。當時我一直把它們混為一體。現在，我在為數學系高年級學生講授有關課程時，先在黑板上寫出2000，然後問：「這是甚麼？」同學們幾乎同聲地回答：「是兩千。」我再問：「是兩千嗎？」沉默一會後，才有少數學生答：「是表示兩千的符號。」由此可見，對看似顯然的一些基本數學對象，我們數學學人的理解也還多麼渾沌！這一方面是因為基本對象表面上的顯然性和進一步分析的困難性，另一方面是因為每個人都很難時時對自己的思維模式保持審視的態度。此時，我不禁感到對陳文的評論太冷峻了。處處以討論科學論文的方式，用嚴格的數學標準去分析，固然合理，卻未必合情。何況，陳之藩君文章的標題後有一「？」號，表達了對此的詢問與探尋。

從另一個角度看，陳文敍述了一個數學對象在各領域中的生動表現，着力於把自然科學與人文科學的內容融於一爐。雖然令人遺憾地，其中若干論述不甚正確，但這種跨越自然科學(包括數學)與人文科學鴻溝的努力是有意義的。我感到，人文科學更多地援引自然科學的成果和研究方式，自然科學更多地引伸出人文科學的意義，這兩者間深刻的滲透，將成為未來學術研究的潮流，並形成一種新的文化。顯然，這絕不會是一種時髦，而是一個既艱難又漫長的過程。因為它要求投身其中的人對兩者都有濃厚的興趣，並對兩者都有足夠的素養。它使人在感受雙重的喜悅之前，先面對雙重的困難並遭到雙重的評判。它不是兩者簡單的混合，須有探究底蘊的洞見。這裏沒有現成的方向，猶如無路的莽原。看當今的學術天地，自覺地面對這種挑戰的先驅者，還寥若晨星。但他們的成果已如閃電與驚雷。經濟學或社會學中的數學模型，試管嬰兒或安樂死中的道德評判，法學中邏輯不矛盾性的檢測，語言哲學

我感到，人文科學更多地援引自然科學的成果和研究方式，自然科學更多地引伸出人文科學的意義，這兩者間深刻的滲透，將成為未來學術研究的潮流，並形成一種新的文化。

中數理邏輯的淵源，……這種晨曲一次次地傳來，使一些人驚喜，一些人坐臥不安。

兩千多年來關於黃金分割的話題綿延不絕，是因為它既是數學的，又是美學的，又是哲學的，而且是未被窮盡的。它是事物內涵的多樣性和豐富性的象徵，也是人們精神探索的多樣性和豐富性的象徵。環顧世界，新的事物不斷湧現，在每一個有形和無形的領域，都沒有最後的答案。已知的永遠是那麼少，未知的永遠是那麼多。

我們注定要永遠探索。

註釋

① 文中的三個命題可證明如下。

(a) 在小數點後的前M位，每一位置上的數碼均可選為0或1。這樣，不同的排列共有2的M次方個。然後把每一排列，按鏡面對稱的要求擴展成2M位小數，顯然，每一個這樣的二進位小數，都滿足陳文所述的鏡面「對稱」的要求，且每一個滿足這種要求的2M位的有限二進位小數都被我們選到。再按二進位數與十進位數的轉換公式，可得出對應的與之相等的2的M次方個十進位小數，這些十進位小數即為所求。

(b) 每選定2M位就得出2的M次方個滿足要求的數。不限小數位即意味着2M可以任取，亦即M可以任取，當任意給定一個數N，都可找到對應的M，使2的M次方大於N。即，不限制M時，2的M次方是一個無窮大量，這就意味着，滿足要求的數有無窮多個。

(c) 要證[0, 1]上任一長度不為0的子區間上有無窮多個滿足鏡面對稱要求的數，只須證明：在[0, 1]的任一長度不為0的子區間上都有一個滿足這種要求的數就行了。因為，由已有的實數稠密性定理，易知，在每一個長度不為0的子區間上，都可以作出此子區間上的無窮多個相互沒有公共點的長度不為0的更小的新的子區間。

任取一個子區間[a, b]，設它的長度為 L($L>0$)。將區間的中點 $(a+b)/2$用二進位有限小數(設它為 K 位小數)表示，記這個近似值為 c。並要求 $\left|c-\frac{a+b}{2}\right|<\frac{L}{4}$ 與 $\frac{1}{2^k}<\frac{L}{4}$。我們把K取得充分大，就能同時滿足這兩點。然後，把這個 K 位的二進位小數 c 按鏡面對稱的要求，擴展成2K位的二進位小數 d。根據二進位小數的值的計算法，$|d-c|<\frac{1}{2^k}$。這樣，$|d-c|<\frac{L}{4}$。於是，$\left|d-\frac{a+b}{2}\right|<\frac{L}{2}$。這說明，具有鏡面對稱的二進位小數 d，是在區間[a, b]內。此即，我們證明了在任取的子區間[a, b]上，能找出一個具有鏡面對稱的二進位小數。

須要說明的是，在[a, b]上還可用別的方法找出別的也滿足要求的數。但如前所述只要找到一個，對證明已經足夠，此處求得的d已完全滿足證明的要求。

文中的K, M, N為自然數。a, b, c, d, L為實數。且必須$1\geq b>a\geq 0$, $L>0$。

蕭昌建 四川成都人，成都大學數理系副教授。