科技文化

世界是必然還是偶然的？——混沌現象的啟示

●郝柏林

冥冥有手寫天書，彩筆無情揮不已；
流盡人間淚幾千，不能洗去半行字。

——奧瑪伽音①

這裏波斯大詩人奧馬珈音（Omar Khayyam, 1048-1122）説的是歷史前定，人類活動無能爲力改變它的進程。處於另一極端的英雄史觀，則强調自由意志的作用，從而賦予歷史發展以依賴於個人特色的隨機性。前定與隨機，必然與偶然，向來是人文科學中長期爭論不休的命題。另一面，自然科學理論始終受實驗和觀測的檢驗，而它的每個重大發展又都會反饋到文化層次，對人的哲學和歷史觀有所啟示。近二十年來「混沌」（chaos）運動的研究，正在改變着數理科學工作者對決定性和概率性描述的認識。本文擬將這方面的革命性發展作簡短介紹，並就混沌研究的啟示，略抒孔見。

決定性和概率性描述

對於同一個自然界，物理科學中有**決定性**（deterministic）和**概率性**（probabilistic）兩種描述。在牛頓（Isaac Newton, 1643-1727）創立古典力學之後250年間，直至本世紀20年代爲止，決定論長期處主導地位，基於概率論的統計描述，原則上只能視爲「不得已」情況下所採用的輔助手段而已。

牛頓在1687年初版的《自然哲學的數學原理》一書中，完整地表述了他的絕對時空觀，運動三定律和萬有引力定律，演繹推導出刻卜勒（Johannes Kepler, 1571-1630）的行星運動三定律。《原理》第三篇討論了「宇宙系統」（其實那只是到土星爲止的太陽系）。後來，在1799-1827年間出版的拉普拉

斯（Pierre-Simon de Laplace，1749-1825）五卷《天體力學》巨著中，運用牛頓力學於太陽系行星及其衛星的軌道計算，臻於極精微的程度。拉普拉斯甚至宣稱，只要給定了「起始條件」，就可以預言太陽系的整個未來。

這就是所謂「機械決定論」（mechanistic determinism）的觀點，它認爲：應用牛頓所發現的諸定律，可以精確計算天體的運動，所以，通過精確的物理定律，宇宙目前的狀況原則上也就全部「決定」了它以後的發展。這種機械決定論觀點，因爲海王星的發現而登峰造極。

原來自1781年確認天王星之後，就發現它的實際軌道總是不規則地偏離計算結果。許多科學家想到，這可能是由於一顆更遙遠的未知行星的擾動。法國天文學家勒維葉（Urbain-Jean-Joseph Le Virrier）運用天體力學精確預言了新星的位置。1846年9月23夜德國天文學家伽雷（Johann Gottfried Galle）就在預言的位置一舉發現了這太陽系的第八顆行星。儘管英法兩國爲了它的優先發現權和命名而進行了一場頗動感情的爭論，這個大發現使得決定論的成功似乎並無異義了。

然而，事情並非盡善盡美。十九世紀末葉已經知道，描述三個或以上天體運動的方程組「不可積分」，更不能解析地求解。太陽系能否永遠地穩定運行，也是懸而未決的難題。換言之，理論上已準確決定了的事情，事實上還不一定能用已知的數學方法展示出來。「未知」還是現實的一部分。

就在機械決定論取得輝煌成就的同一時期，蒸汽機和內燃機的發展把對氣體性質的研究提上了日程。人們使用壓力、溫度、體積這些宏觀概念，尋求它們之間的經驗規律，終於建立了熱力學體系。基於大量實驗事實的熱力學諸定律，起着宏觀世界根本大法的作用。流體力學的方程組，也是爲類似的宏觀變量建立的。然而，爲了從大量原子分子運動和相互作用出發，推導氣體的宏觀性質或流體力學方程，那就必須引入這些粒子（實際上無從一一測定的）位置、速度分佈的概率假設，並運用統計方法。所以，概率性觀念就成爲必須了。

湍流（turbulent flow）是人類世世代代尋常慣見的現象。從1883年雷諾（Osborne Reynolds，1842-1912）引入無量綱的特徵數（雷諾數）對圓管中液體流動進行定量研究開始，積累了各種物理和幾何條件下平穩流動如何突然轉變成湍流的觀測資料。但流體力學的基本方程是基於光滑和連續概念的決定性偏微分方程組，它們怎麼能描述似乎沒有規則的湍流？湍流的發生機制和發達的湍流狀態又是怎樣的？

這樣，在十九世紀末的物理學裏，除了那些後來導致相對論和量子力學的基本矛盾之外，還在不同層次上隱含着沒有解決的，關於決定性和概率性取捨的重大問題：不可積分的牛頓方程以及相關的運動圖象，統計物理學的基礎，湍流的發生機制和描述。然而，二十世紀初相對論和量子力學的成功，接踵而至的令人眼花撩亂的技術發展，和兩次世界大戰對軍事技術的要求，吸引了絕大多數物理學家的注意力。上述艱難的根本性問題，因此被留給數學家們去潛心研究。

牛頓力學的內秉隨機性

在一切可能的力學系統之中，到底有多少是「不可積分」，也就是說，我們無從用已知的數學方式來表示它的運動形式的？二十世紀40年代數學家西格爾（C.L. Siegel）等人已經給出答案：不可積分的系統俯拾即是，多不勝數，而可積可解的力學問題，卻稀如鳳毛麟角。傳統的大學力學教科書掛一漏萬，並沒有描繪出牛頓力學的真面目。

但「不可積分」的力學系統的典型運動圖象究竟是甚麼樣子的呢？這是極爲困難的數學問題。直到KAM定理（由A. N. Kolmogorov在1954年提出，由V. I Arnold和J.Moser分別於60年代初證明，因而得名）出現，這問題才算有了實質進展。粗略地表述出來，KAM定理好像頗爲平淡。它說：在一定條件下「弱不可積系統」的運動圖象與「可積系統」差不多。可是這時物理學家手裏已經有了新式武器——電子計算機，能夠突破解析方法的局限，對KAM定理的條件大作反面文章了。結果是完全出乎意料之外的。原來，只要破壞定理所假設的任何一個條件，運動都會變得無序和混亂。當然，這運動所遵循的，仍然是決定性的牛頓力學方程式。也就是說，只要精確地從同一點出發，得到的仍是同一條確定的軌道。然而，只要初始條件有無論多微小的改變，其後的運動就會失之毫釐，差之千里，變得面目全非。還有幾個經過嚴格數學證明的實例，說明某些牛頓力學刻劃的運動，**實際上**可能同擲骰子所得的一樣，是**隨機**（random）和**不可預測**（unpredictable）的。

一個典型的「不可積分」的力學系統，通常兼有規則運動和隨機運動的兩種不同區域。隨着某個參數（譬如代表作用力强度的參數）的變化，隨機區域可能逐漸擴大，終至併吞掉規則運動的區域。我們甚至可以嚴格地定義在規則運動區域中等於零，而在隨機運動區域中大於零的特徵量（這稱爲Kalmogorov熵），來量化運動的隨機程度。規則運動是「簡單的」，隨機運動是「複雜的」，現在可以定量地區分「簡單」和「複雜」運動了。

因此，**決定性**的牛頓力學從計算和預測的觀點來看，**實際上**具有**內秉隨機性**（inherent randomness），這就是微觀層次（即個別粒子，或所謂無內在自由度的個體的層次）上的混沌運動。

湍流和奇怪吸引子

現在我們回到宏觀層次（即由許多粒子形成的群體的層次），看湍流問題。湍流現象普遍存在於行星和地球大氣、海洋與江河、火箭尾流、焗爐燃燒室、乃至血液流動等自然現象之中。它的困難之處固然在於流體運動有無窮多個自由度，可如果事情只限於大、中、小、微各種尺寸的旋渦層層相套，運動

能量錯綜複雜地由整化零，那麼統計描述仍可能奏效。問題在於，湍流是經過一次或多次突然轉變而形成的，而在紊亂無規則的背景上往往又會出現大尺度、頗爲規則的結構和紋樣，出現協調一致的運動。即使撇開湍流的空間結構不談，**決定性**的流體力學方程怎麼能允許貌似**隨機**運動的紊亂的時間行爲？

1963年麻省理工學院的氣象學家羅倫茲（E. N. Lorenz）研究對天氣至關重要的大氣熱對流問題。他大刀闊斧地把包含無窮多個自由度的偏微分方程砍成只剩三個變量的常微分方程組，放到電子計算機上去。他發現即使對這樣一個經過極度簡化的系統來說，大氣狀況「起始值」的細微變化，亦盡足以使非周期性的氣象變化軌道全然改觀。這一後來使羅倫茲成名的發現，當時卻發表在鮮爲人知的《大氣科學雜誌》②上。羅倫茲本人當時卻已經意識到，這種普遍存在的氣象變化軌道的不穩定性，會使長期天氣預報的希望幻滅。他曾以誇張的口吻，講到「蝴蝶效應」：南美洲亞馬遜河流域熱帶雨林中一隻蝴蝶，偶然搧動了幾次翅膀，所引起的微弱氣流對地球大氣的影響可能隨時間增長而不是減弱，甚至可能兩週後在美國德克薩斯州引起一場龍捲風。我們在後面再繼續談這個問題。

1975年數學家茹厄爾（D. Ruelle）和塔肯斯（F. Takens）建議了一種湍流發生機制，認爲向湍流的轉變由少數自由度決定，經過兩三次突變，運動就到了維數不高的「奇怪吸引子」（strange attractor）上。這裏所謂「吸引子」（attractor）是指運動軌迹經過長時間之後所採取的終極形態：它可能是穩定的平衡點，或周期性的軌道（圖1）；但也可能是繼續不斷變化，沒有明顯規則或次序的許多迴轉曲線，這時它就稱爲「奇怪吸引子」。奇怪吸引子上的運動軌道，對軌道初始位置的細小變化極其敏感③，但吸引子的大輪廓卻是相當穩定的。他們兩位當時並不知道奇怪吸引子的實例，是另一位數學家約克（James A. Yorke）發掘出羅倫茲的論文，也是約克在玻爾茲曼（Ludwig E. Boltzmann, 1844-1906）之後90年把「混沌」（chaos）一詞重新引進科學語匯。

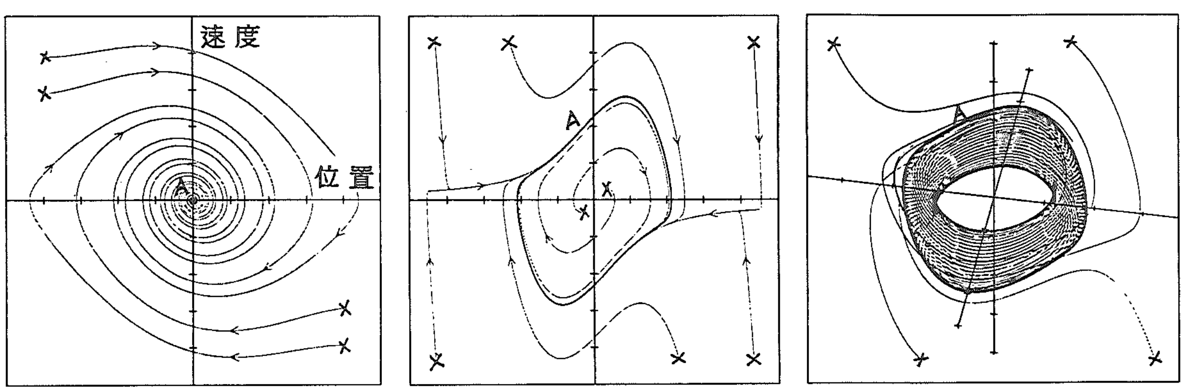

圖1：前此熟知的有規則、可預測的運動軌跡。左圖是有摩阻單擺在「位置」和「速度」所構成的「相空間」的運動軌跡，它的「吸引子」是定點（A）即無論起始狀態（以x代表）如何，它至終都在中央靜止；中圖是鐘擺的軌跡，吸引子（A）是隱定的極限周圈；右圖是複振動在三維空間的環形吸引子（A）。

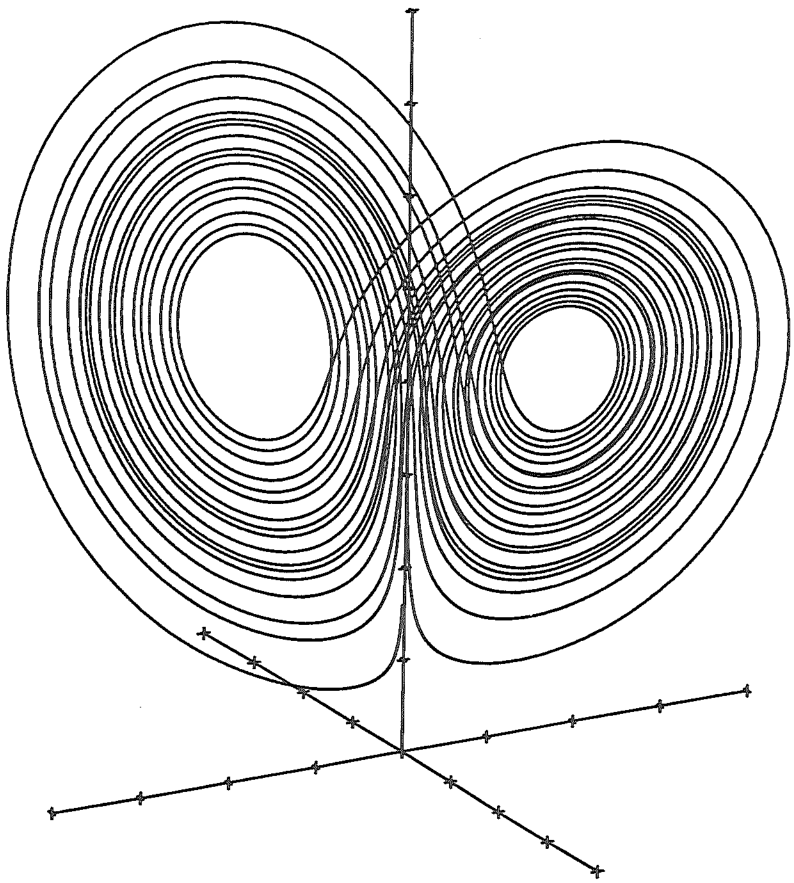

圖2　羅倫茲吸引子的圖象：這是一條在三度空間似乎無序地左右迴轉的連續光滑曲線。它並不自我相交（在本平面透視圖中這一點不容易顯示），並呈現極複雜的紋樣。這是最著名的一個「奇怪吸引子」。

圖2所示，是約克所繪制的羅倫茲吸引子。這是一條連續而光滑的軌道，它以看來相當隨機的方式，在左右兩翼中轉圈。如果稍稍改變一下軌道初值，左右跳動的順序和次數就會完全不同。

對初值的敏感依賴性，是在奇怪吸引子上的運動軌道的主要特徵。在各種決定性的宏觀方程中，由於能量耗散而使有效的運動自由度減少，最終局限到低維的奇怪吸引子上。這就是宏觀層次上的混沌運動。圖3是另一組微分方程中的奇怪吸引子，取自作者和北京師範大學胡崗的尚未發表的工作。形狀像是數字88的依稀相聯的兩片，由不同初值的四十條軌道組成，如果只畫一條軌道，計算時間延長40倍，也得到輪廓大致相同的吸引子，這就是所謂遍歷性（ergodicity）。遍歷性是奇怪吸引子的另一特徵。

其實，混沌運動可以發生在比微分方程更為簡單的模型中。

來自簡單模型的複雜行為

簡單原因可能導致複雜後果，這是混沌研究所提供的一條重要信息。許多看起來雜亂無章、隨機起伏的時間變化或空間圖案，可能來自重複運用某種極簡單而確定的基本或「元」（elementary）作用。我們看兩個例子。

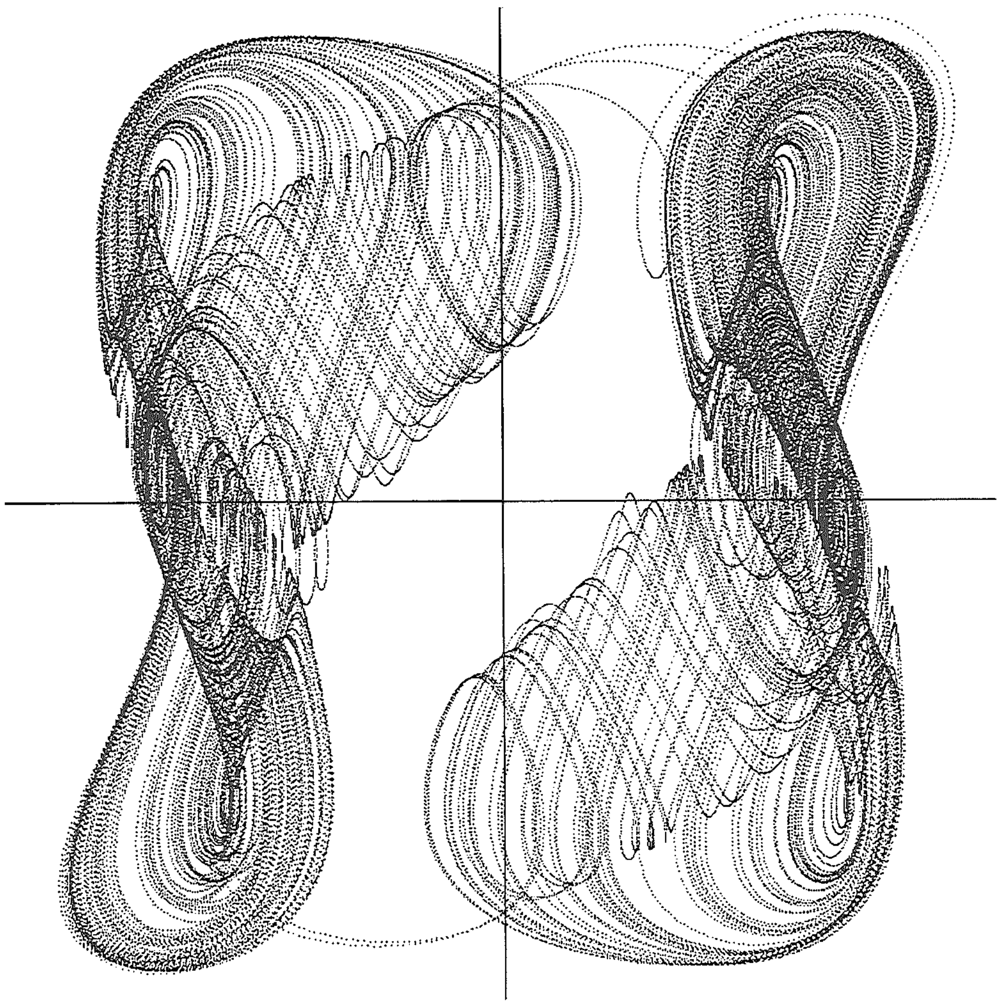

圖3 郝柏林和胡岡所發現的另一個「奇怪吸引子」，它也是極複雜的三度空間曲線，本圖所示是它的平面投影。

第一個例子是不同代的昆蟲數目變化。假定成蟲產卵後全部自然死亡，然後孵化出下一代，世代之間沒有交迭。如果下一代「蟲口」數簡單比例於前一代蟲口數，那麼只要平均產卵數多於1，過不了多少代整個地球就會「蟲滿爲患」。這正是馬爾薩斯（Thomas R. Malthus）「蟲口」論：蟲口按幾何級數增長。然而蟲口過多，食物有限，它們就要爲爭食而咬鬥，傳染病也會因接觸增長而蔓延。「咬鬥」和「接觸」，都是同時涉及兩隻蟲子的事件。這類事件的總數比例於蟲口的平方，而它對蟲口變化產生負作用。這樣，就得到一個較爲現實的蟲口模型：

$$y_{n+1}=Ay_n-By_n^2$$

其中y_n是第n代蟲口，y_{n+1}是第$n+1$代蟲口。意味深長的「非線性項」y_n^2代表相互作用。其實，這種模型何只限於描述蟲口變化。這是最簡單，但同時又考慮

了有利和不利因素，包括「鼓勵」和「約束」兩種作用，能夠反映「過猶不及」的自我調控模型。它實際上只有一個獨立參數，可以寫成準標形式

$$x_{n+1}=\lambda x_n(1-x_n)$$

或

$$x_{n+1}=1-\mu x_n^2$$

現在我們可以開始很簡單地計算一代又一代的蟲口變化了：給定參數λ（或μ）和初值x_2，計算出x_1，再用x_1計算出x_2，……。扔掉最初100個點（它們代表蟲口尚未達到穩定態的過渡期），再把其後的300個x_n畫出來，就得到圖4所示的「分岔圖」（bifurcation diagram）。圖中橫座標是參數λ（或μ），縱座標是X。它反映出兩大類不同的蟲口變化方式。在某些參數區域，x_n只在幾個點之間周而復始地跳來跳去，特別在圖的左側，有一個1、2、4、8、……點的「倍周期」序列。不管初值如何改變，周期點的數值始終不變。這是對初值不敏感的周期變化區域。

在另一些參數值，主要在圖的右側，x_n在一段或幾段確定的λ（或μ）區域內似乎隨機地跳動。稍爲改變初值，x_n所經歷的具體數值就完全不同。這是對初值變化敏感的混沌區域。但即使在混沌區域之內，仍又包含有更小的周期變化區域（圖5），在其中x_n是對初值不敏感的。所以，這分岔圖雖是由極簡單的方程式得來，但它的結構則是極度複雜的。

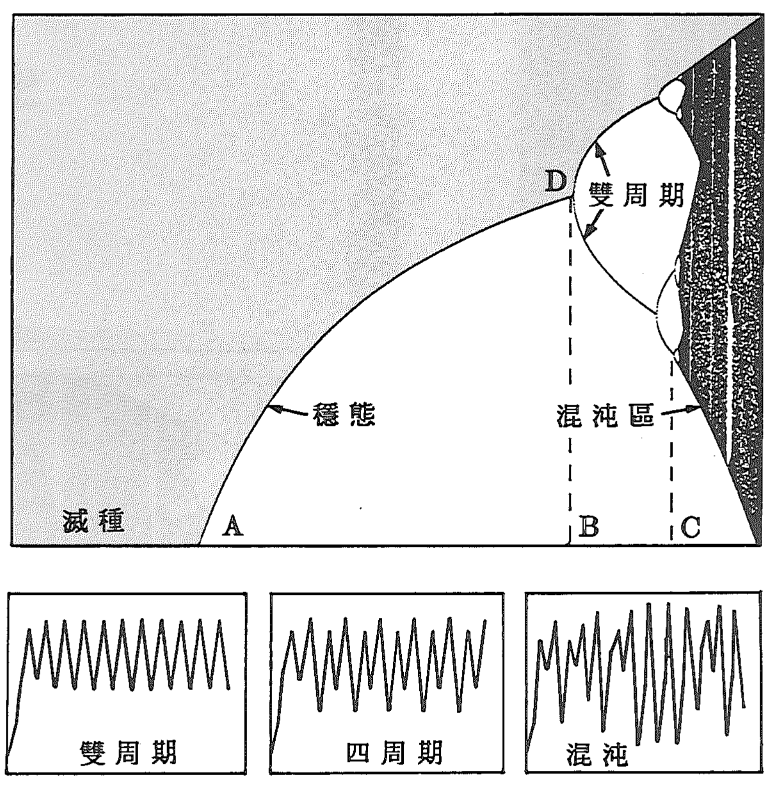

圖4 生物數目變化的分岔圖。圖中橫軸是參數值λ，縱軸是生物數目x_n。λ小於A時，生物瀕絕滅；λ超過圖中A點時，x_n趨於一逐漸增加的「穩態值」；λ超過B時，穩態值分岔為二，其後再分岔為多個值，x_n則擺動於幾個穩態值之間；λ超過C時，x_n就不再有穩態，而作無序跳動，這就是「混沌區」。

我們的第二個例子是最簡單的「元胞自動機」(cellular automaton)：取若干枚硬幣排成一行。每枚硬幣可能正面向上，也可能反面向上，這正反排列的次序，構成元胞自動機的一個「狀態」。跟着，我們定下一條簡單而確定的規則令自動機改變狀態。規則可以是：每枚硬幣根據自己和左右兩鄰的正反而決定是否翻身。這類規則的變化花樣並不多，它們會導致幾大類不同的發展前途。圖6就是用一套具體規則所形成的圖案：由上而下，是依次「變化」之後形成的狀態；從左到右，是硬幣的空間排列，黑白分別代表正和反。我們所見到的，可以說是一種「時空混沌」圖案。你能說它是完全隨機的斑點嗎？顯然不能，因爲它明顯含有結構。然而，你能「就圖論事」，指出其中細節的出現規律嗎？顯然又不那麼簡單！

這兩個例子，都不是茶餘飯後的消遣遊戲。許多高維的「吸引子」可以通過投影而形成類似圖3的「分岔圖」。這其中奧妙至今還未完全研究透徹。而二維和三維的「元胞自動機」，也已經成功地用於模擬流體運動和湍流了。

這兩個例子，都是重複使用簡單而確定的規則，得出絕不平庸的時間演化或空間圖案。反過來說，從貌似複雜的時間、空間或時空行爲，也可能反溯到原始的簡單的動力學規律。事實上，我們在這方面已經取得相當成績。混沌研

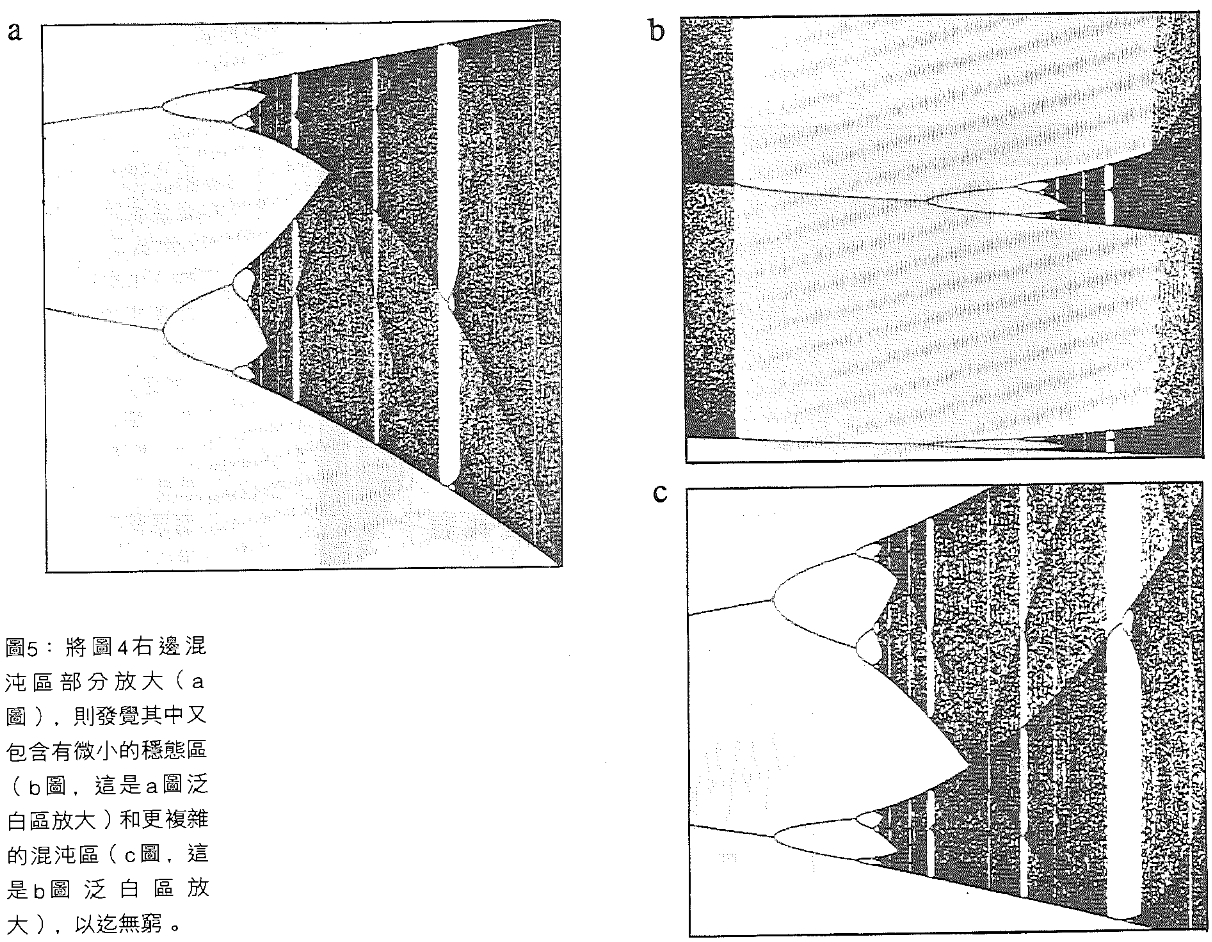

圖5：將圖4右邊混沌區部分放大（a圖），則發覺其中又包含有微小的穩態區（b圖，這是a圖泛白區放大）和更複雜的混沌區（c圖，這是b圖泛白區放大），以迄無窮。

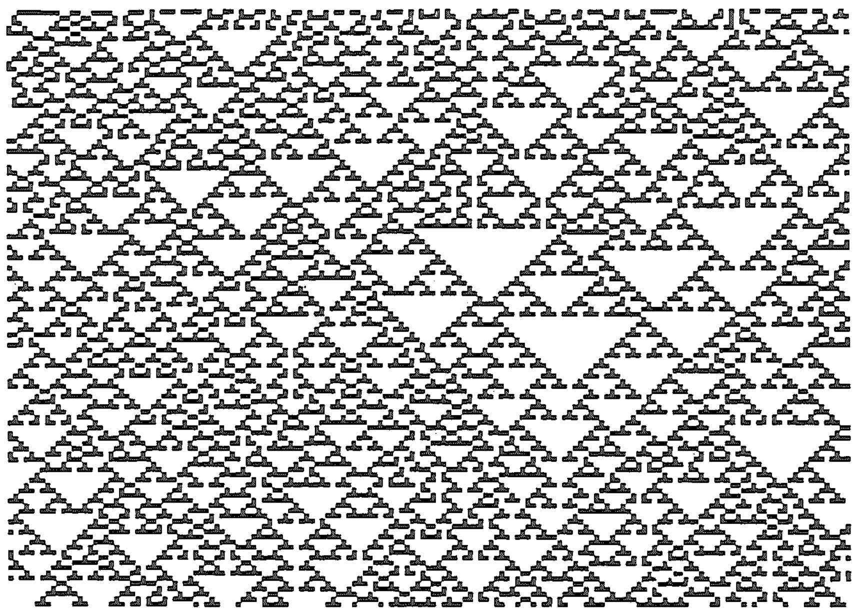

圖6　由一維元胞自動機的時間序列所產生的「時空混沌」圖案。詳見內文。

究的進展，不是把簡單事物弄得更複雜，而恰恰是爲尋求複雜現象的簡單根源提出了新的觀點和方法。

混沌的數學框架

混沌不是無序和紊亂。一提到有序，人們往往想到周期排列或對稱形狀。混沌更像是沒有周期性的次序。在理想模型中，它可能包含着無窮的內在層次，層次之間存在着「自相似性」（self-similarity）或「不盡相似」。在觀察手段的分辨率不高時，只能看到某一個層次的結構。提高分辨率之後，在原來不能識別之處又會出現更小尺度上的結構。《易乾鑿度》說「氣似質具而未相離，謂之混沌」，看來混沌二字比英文的chaos更能反映這種狀態。

無獨有偶，數學家曼德布洛（B. B. Mandelbrot）多年來苦心宣傳的「分形幾何學」（fractal geometry）④不僅是更接近自然現象的幾何學，而且也正就是混沌現象的幾何學。零維的點、一維的線、二維的面、三維的體和四維時空，是大家所熟悉的幾何對象。它們的維數（dimension）是整數。但從1919年以來，數學中已經引入分數維數（簡稱「分維」）的概念。著名的實例是「康托集」（Cantor set）：取一線段三等分之，移去中段之後再各三等分餘下的兩段，然後繼續移去相應的中段，這樣反覆運作下去，以至無窮，就得到了康托集，它是無窮多個點的集合。它的維數介於兩個整數之間，可以算出來是0.63092375……。具有分維的幾何形體稱爲「分形」（fractal，這是曼德布洛創造的新詞）。前面圖1所示的羅倫茲吸引子正就是分形，它的分維是2.06。而其他與混沌運動有關的圖象（如圖2-6）也都是分形：混沌運動的高度無序、混亂性就反映在分形的無窮複雜性上。

混沌也不是噪聲（noise）：這裏所謂噪聲，不但是指大街上的喧嚷，而是泛指一切來自我們所着眼的物理系統以外的微小干擾，例如地基震動、氣溫變化、電壓漲落等等。噪聲的特徵是它是**真正隨機**，而絕對**無從預測**的。在現實世界中，混沌往往披着噪聲的外衣出現。在我們還未曾懂得混沌現象之前，混沌不知有多少次被誤爲噪聲而忽略了。噪聲在任何實際系統中都是不可避免的，而它對混沌研究是有極重要影響的：噪聲可以誘發混沌；噪聲限制了我們對混沌現象的無窮內部層次的探測深度。對混沌的觀察，必須滿足於有限而非無窮的分辨能力。

有限分辨率帶來了新挑戰和新方法。假定我們無法分辨圖1中軌道的具體走向，而只能判斷它是在左半還是右半平面裏轉圈，那麼我們對一條軌道所能判斷的就成爲左（L）右（R）兩種字母的交替，例如

RRRLRRLLR……

這種描述丟失了無窮多的細節，但仍可能保留一些本質的信息，如周期性或混沌性。我們甚至還可以用這種辦法來比較兩條軌道那一條更爲混沌。這種作法的數學理論稱爲「符號動力學」（symbolic dynamics）。符號動力學是在有限精度下描述複雜動力過程的嚴格方法。

我們已經知道，重複使用簡單確定的規則可能得出極其複雜的現象。這樣作時可能先要經歷一段過渡狀態，然後那複雜行爲就「穩定」下來，運動（或現象）的圖案紋樣（pattern）可能繼續翻新，但基本性質不再變化。廣義來說，這也是一種「定態」。重複使用某種規則或變化方式以達到定態，這就是在「相變」（phase transition）和「臨界現象」（critical phenomenon）理論中行之有效的「重正化群」（renormalisation group）方法。它對於分析混沌現象也發揮了重要作用。分形幾何學，符號動力學和重正化群「三位一體」地構成混沌理論的數學框架。在目前，這還不是已經完成的學術定論，而是繼續研究的綱領。這套適應離散、不連續、不穩定、不可微分、處處稀疏……的形象、事物的「有限」分析（finite analysis），迥異於傳統的基於連續、光滑、穩定、可微分、處處稠密的牛頓「無窮小」分析（infinitesimal analysis）。它是更接近現實世界的數學。

預報能力的提高

羅倫兹的「蝴蝶效應」粉碎了本來並不能實現的長期天氣預報幻夢，但人類的實際預報能力，反因爲混沌研究而提高。事實上，作長期預報時，我們所關心的並不是單個具體軌道的行爲，而是它平均值的變化。以天氣預報爲例，我們關心下星期天的晴雨冷熱，但就十年後的氣候而言，更重要的是耕種季節的平均降水量和平均氣溫。混沌研究使以往根據統計原則所作的預報，上升爲動力學預報，也就是應用了似是隨機現象的內在規律，從而提高了預測單個軌道近期行爲的精確度，並豐富了長期預報的辦法。

原來傳統的預報方法基本上是統計性的，——它並不假定或應用觀測量本身的內在變化規律。它的辦法是從觀測得到的數據序列計算各種平均值和高次矩，並且與近期平均值比較。如果近期值明顯偏低，則前途「看漲」，否則「看落」。具體作法雖五花八門，說穿了其實不過如此。

但如果預報所涉及的複雜過程背後，存在着簡單的動力學機制，則混沌研究近來已經提出一些方法，可以從觀測數據回過頭來「重建」動力學規則，把這些推斷所得的規則用到預報上去，近期預報的質量就會顯著提高，它同時還可以指示當前預報質量高低⑤。

當然，實際上是否有「氣候吸引子」或「經濟吸引子」，那並不取決於我們的願望，而得要從實際數據的研究來確定。

量子混沌問題

量子力學的建立是對機械決定論的嚴重挑戰。堅持正統決定論的物理學家，如愛因斯坦（Albert Einstein），就始終不能接受量子力學的統計詮釋，不相信上帝喜歡「擲骰子」。然而，量子力學的統計詮釋主要涉及波函數與觀測量的關係，量子力學的基本方程則是完全決定性的線性方程。那麼，究竟有沒有「量子混沌」那樣的現象呢？

本文迄今所講的混沌，都發生在經典的非線性力學系統中，在微觀層次上它是「不可積分」的牛頓方程和統計物理的基礎問題，在宏觀層次上它是流體力學或類似方程的湍流問題。從數學上說，則多是初值問題的長時間行為，即給定初始時刻的狀態，看時間趨於無窮長時間系統是否達到混沌吸引子。在此，我們必須注意，有些混沌行為僅僅表現在過渡期間，它們最終煙消雲散，那也很常見，只是前面沒有提到而已。

最直接的量子混沌問題，是取一個確切有混沌行為的經典力學系統，通過熟知的數學規則把它「量子化」，看後果如何。近十年來的研究表明，這類量子化了的系統中並沒有混沌。既使看到一點反常現象，那也只不過是經典混沌的痕迹，並不具有量子本質。

混沌是經典系統的典型行為，量子系統的典型行為不是混沌。這一差別的深遠意義，還有待進一步研究。對此，我們只提出值得思考的兩點。

第一點是，德國的理學家波恩（Max Born，1882-1970）在1955年指出，如果用各自的自然時間尺度去衡量，微觀世界比宏觀世界遠為長壽⑥。地球繞太陽的周期可以作為宏觀世界的時間單位，所以，太陽系至今存在了大約10^{10}年，也就是10^{10}單位。另一方面，電子繞原子「運動」，每秒鐘可以有10^{16}或更多次的振動或迴旋。所以，混沌運動似乎主要存在於「短命」的宏觀現象中。

第二，我們對直接包含時間的量子力學其實所知甚少。就筆者所知，在時間趨於無窮時量子力學和經典力學的對應問題，並未完全解決。如果有真正的量子混沌，它是否應當沒有經典對應？這問題本身也還不清楚。

有限性原則

完全的決定論和純粹的概率論，都隱含着承認某種「無窮」過程爲前提。就決定論而言，它的準確軌道意味着可能以「無限」精度進行測量：有限的測量精度就不能排除軌道含有隨機成分。對概率論而言，有限長的隨機數序列只能以有限精度通過隨機性檢驗，只有「無窮」長的隨機數序列才可能是「真正」隨機的。事實上，有限個隨機數可能用決定論的過程來產生。所以，只要承認**有限性**，那麼決定性和概率性描述之間的鴻溝就消失了，決定論的動力學可以產生隨機性的演化過程。

實際上，對於世界我們只能進行**有限的**觀測和描述。有限速度和有限「字長」的電子計算機，還有有限長的計算程序和有限的計算步驟，還有有限的計算時間，從另一方面限制了我們的描述和分析能力。而這些都和我們所能計算、描述的現象的性質發生關聯了。看來，我們須得把**有限性**提升爲一種原則，如何表述有限性原則，尚有待繼續研究。

決定論還是概率論？二者的關係可能是非此非彼，亦此亦彼。更真實地反映宏觀世界的觀念應是基於有限性的混沌論⑦。

註釋

① 奧馬伽音：《魯拜集》第71首（黃克蓀衍譯，台北啟明書局，1956）。
② E.N. Lorenz, J., *Atmosph Sci.* **20**（1963），pp. 130-41。
③ 所謂「敏感」，是指初始位置稍有變化，所得的軌道就極為不相同。更精確地説，在奇怪吸引子上，相鄰兩條軌道之間的差異是隨距離以指數形式增加的；否則，在普通情況下，它只是以冪數形式增加。
④ B. B. Mandelbrot, *The Fractal Geometry of Nature*（San Francisco: Freeman, 1982）。
⑤ 可參看 R. Monastersky, " Forecasting into Chaos, Meterologists seek to foresee Unpredictability ", *Science News,* **137**（1990），p. 280。
⑥ M. Born, *Physics in my Generation*（Pergamon Press, 1956）p. 165。
⑦ 對於想更多了解混沌的讀者，我推薦下列通俗著作：James Gleick: *Chaos, Making a New Science*（Viking, 1988）；中譯本《混沌，開創新科學》（張淑譽譯，上海譯文出版社，1990）。

郝柏林 1959年畢業於蘇聯哈爾科夫大學，1980年當選爲中國科學院數理學部委員，現任中國科學院理論物理研究所所長，《中國物理快報》主編，從事理論物理和計算物理研究，著有《相變和臨界現象》、《初等符號動力學和耗散系統中的混沌》等書及論文多種。