渾沌與偶然之間

● 湯家豪

但即使自然定律已經再沒有任何奧秘的時候，我們對實際情況還只是能夠知道大概而已。倘若其後的情況因而能以同樣的準確度加以預測，我們就滿足了，就會説這現象是服從定律的，它已被預測了。但有時不是這樣的：起始狀態的微小差別可能在其後的現象中產生極大差別。前者的些微誤差可能造成後者的巨大誤差。預測成為不可能……。

——龐卡雷

近年來，渾沌(chaos)已經成為數學、物理學、生物學、經濟學、統計學……等許多學科的共同熱門研究課題。這些學科之中既有屬於「硬科學」，也有屬於「軟科學」範圍的，可説是「軟硬兼備」，渾沌觀念與現象的重要，於焉可見。對一般讀者來説，目前已經有好幾本科普書籍，介紹渾沌的奧妙，例如史都域(I. Stewart)的《上帝擲骰子嗎？》①和格萊克(J. Gleicke)的《創造新科學》②，都是不可多得的好書。甚至《二十一世紀》，也曾發表過兩篇有關這一題材的文章了③。既然這樣，那麼筆者又何必再來湊熱鬧呢？這是一個很自然的問題，而答案也是很簡單的：渾沌和偶然性(chance)原來是難分難解的孿生兄弟，而偶然性的研究，則屬於統計學(statistics)的範疇。可是，直至目前為止，有關渾沌的科學文獻和介紹，絕大多數都並非出自統計學者之手，就連有關渾沌的科普書籍也是一樣。而從統計學的角度來説，目前的渾沌理論，尤其是它的應用方面，仍然有很多不足之處。渾沌和偶然性既然如出一轍，都是「隨機」(random)（這

暫時可以理解為凌亂無章的)變化的突出表現，那麼筆者從統計學的角度再來介紹渾沌，特別是討論它與統計學之間的關係，以及統計學者近年來在這方面的成績，應該不是多餘的了。

一　渾沌初開

渾沌這個詞，是從英文的chaos翻譯過來的，另一個譯法是「紊亂」。作為科學名詞的chaos，最先出自李天佑和約克(J.A. Yorke)一篇題為"Period Three Implies Chaos"的文章④。chaos這個字本身，源出希臘文的 χάος，意思是混亂不可究詰的無底洞穴(abyss)，萬物之母 Eurynome 就是從其中出現的。至於渾沌，大家都知道出於《莊子·應帝王》，原是指沒有七竅官感，在神人怪物之間的所謂「中央之帝」⑤，到了漢朝才引申為宇宙未有條理、分際、秩序之前的原始狀態⑥。以渾沌譯chaos，是相當貼切的，而用這兩個古代詞語來名狀近數十年發現的這一特殊科學現象，也是很自然的。

這現象的重要性，是在於它打破了由於牛頓力學而形成的偏見。

自從偉大的牛頓力學理論成立之後，我們便形成了這樣的觀念：宇宙是好像時鐘一樣，有規則地運動的，而且，這有規則的運動，可以用數學方程式表示出來。事實上，這「決定論」(determinism)無論在物理學或者哲學上，都一直佔據重要，甚至幾乎是統治地位。法國十八世紀的大科學家拉普拉斯(Pierre Simon Laplace)的名言「如果我們設想有一種智慧能夠在某一時刻掌握了宇宙中所有事物之間的關係，那末，它就能夠知道所有這些事物在過去和將來的相對位置、運動和普遍效果」，正可以作為這觀點的代表性宣言。

當然，用數學方程式表示的決定性模型已經在許多方面作出，而且將會繼續作出巨大貢獻。我們可以非常準確地預測百年之後何日何時何地會發生月蝕，這可以說是決定論無比威力的最好說明。在拉普拉斯之後將近二百年間，一般科學家都已經習慣於「簡單數學方程式只會帶來簡單解」的觀念了。不料在1976年，澳洲數理生物學家梅洛拔(Robert May)⑦只用了一個似乎極之平凡的疊代方程(iterative equation):

$$x_n = a\,x_{n-1}\,(1-x_{n-1}) \tag{A}$$

就把「簡單方程得簡單解」的謬誤揭露出來了。方程中的x_n代表 x 在時刻 n 所取的值，a是一個在0與4之間的參數，而起始值x_0可在0和1之間任意取值。例如，x_n可視為本月的消費指數，那麼x_{n-1}是上月的消費指數，而x_0是記錄開始時的消費指數，等等。這在統計學上稱為一個時間序列(time series)。例如，每日的恆生指數，每月的失業人數……等等，都構成時間序列。

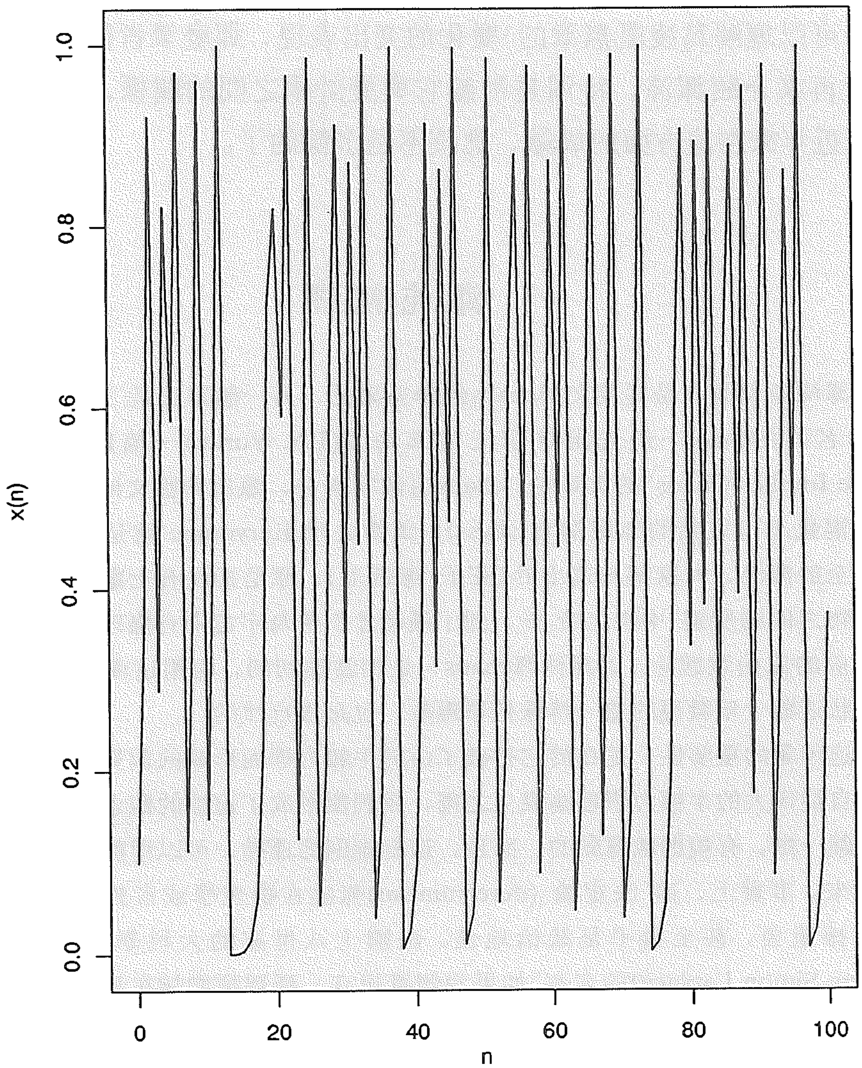

圖1 從簡單疊代方程式(A)在n=1至n=100之間所產生的凌亂沒有規則的折線。

圖1是參數 a=4，起始值$x_0=0.1$情況下，用上述疊代方程所產生的時間序列$x_1, x_2, \ldots x_{100}$。這序列看來凌亂沒有規則，但它的奇妙之處，就正在於此：在表面上，它和其他隨機(random)時間序列(比如說恆生指數)，的確沒有甚麼根本分別！一個那麼平凡、簡單、決定性的方程式，竟然可以導致這樣一個不平凡的，看來極之複雜，沒有秩序的「隨機解」，也就是說描繪了渾沌現象，那真是意想不到，不同凡響的結果。它馬上轟動一時，引起許多科學家，包括數學家、物理學家等的極大興趣。從此渾沌兩字，不脛而走，而且應用日益廣泛，很快就成為一門專門學問了。

不過，話說回來，渾沌的發現不能完全歸功於梅洛拔一個人。事實上，渾沌是「對起始值具有敏感性」的數學程式，而這一門學問，前人早已注意到了，只不過後人善忘而已。遠的不提，至少龐卡雷(Henry Poincaré)和哈特馬(Jacques Hadamard)這兩位法國數學大師在這方面的蓽路藍縷之功是不可忘記的⑧。其中哈特馬壽命特長：他成名於上世紀末，曾經來華訪問，幫助過中國現代數學的成長，在1963年逝世時已臻九十高齡了。

二 差之毫釐 謬以千里

甲 孿生兄弟

相信人人都聽過類似下面的埋怨：「若果二十年前那天，我沒有參加甲小姐的舞會，就不會認識乙君，那麼他就不會追求我，我們也不會結婚，不會生下這兩個孩子……。」參加與不參加甲小姐的舞會，在當時很可能只是由一念之差造成，但這一念，經過相當時候，卻會產生意想不到的重大後果！個人如是，歷史亦復一樣。英國民諺所謂：「因為缺釘，丟了馬蹄鐵；因為缺馬蹄鐵，丟了馬匹；因為缺馬匹，丟了勇士；因為缺勇士，丟了戰役；因為戰敗，丟了國家」，說的也正就是這個意思。

奇妙的是，這種差之毫釐，謬以千里的現象，同樣可以由疊代方程(A)產生。表1所列，就是當$a = 4$時，分別用$x_0 = 0.1000000000$和$x_0 = 0.1000000100$這兩個幾乎相同，只在小數後第8個位有一點差別(也就是10^7分之一的差別)的起始值，所產生的甲、乙兩個時間序列。大家可以見到，經過10次輪代之後，兩個序列還只是有10^4分之一的差別，但經過50次輪代之後，則甲、乙序列之間已經再也沒有任何關係，可以說「判若兩人」了。圖2所示羅崙茲(Edward Lorenz)在60年代初所發現的著名天氣預報曲線，也顯示了相同的道理。因此，對某些事物我們是委實無法作出準確長期預報的，原因就是這些事物對決定其後來發展的起始值具有敏感性。

事實上，x_n序列和隨機時間序列(譬如說，以擲骰來決定每一位小數的值)，並沒有清楚的本質分別。表1的序列是由決定性數式產生的渾沌結果，而

n	甲序列	乙序列
x_0	0.100 000 000 0	0.100 000 010 0
x_1	0.360 000 000 0	0.360 000 003 2
x_2	0.921 600 000 0	0.921 600 035 8
x_3	0.289 013 760 0	0.289 016 639 1
…	…. ….	…. ….
x_{10}	0.147 836 599 9	0.147 824 444 9
…	…. ….	…. ….
x_{50}	0.277 569 081 0	0.435 057 399 7
x_{51}	0.802 094 386 2	0.983 129 834 6
x_{52}	0.634 955 927 4	0.066 342 251 5
…	…. ….	…. ….

表1

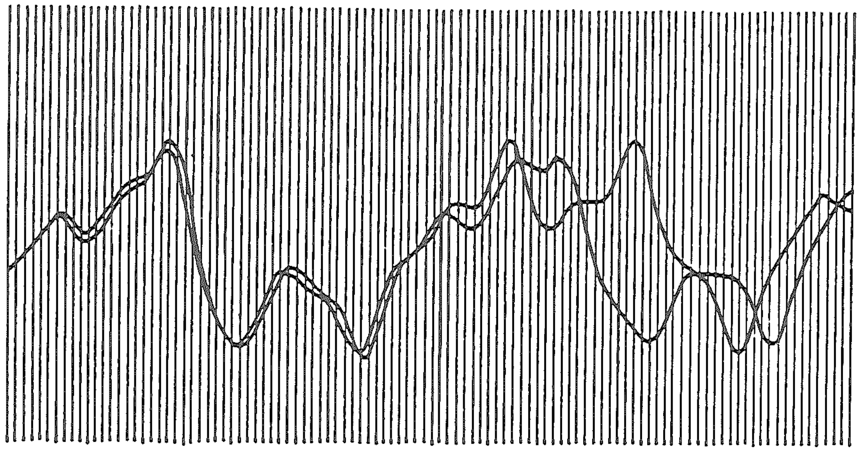

圖2 羅崙茲還是麻省理工學院研究生的時候(約1963年)發現在天氣預報的動力系統模型中，只要起始狀態有極微細的誤差便會迅速導致兩條曲線間產生巨大差別，這稱為「蝴蝶效應」。

擲骰則是典型的隨機事件，所以二者可說是孿生兄弟，它們的母親就是「對起始值具有敏感性」——但必須知道，偶然性也還有其它根源。

我們可以從另一個角度來說明問題。在表1，假若我們把甲、乙兩個序列的起始值取得更接近些，例如只在第40個小數位之後不相同，那麼即使經過50次疊代它們相差也不會太大。換言之，起始值相差愈小，甲乙兩序列能保持相接近的輪次愈多。同樣，在擲骰子的時候，假如能夠把手力(即骰子擲出的初速和旋轉初速)控制自如，那末就可以隨心所欲，得到所要結果。兩個例子的共同點是：(1)結果都對起始值具有敏感性；(2)起始值不可能有無限精確度。由是，就出現了渾沌和偶然性。

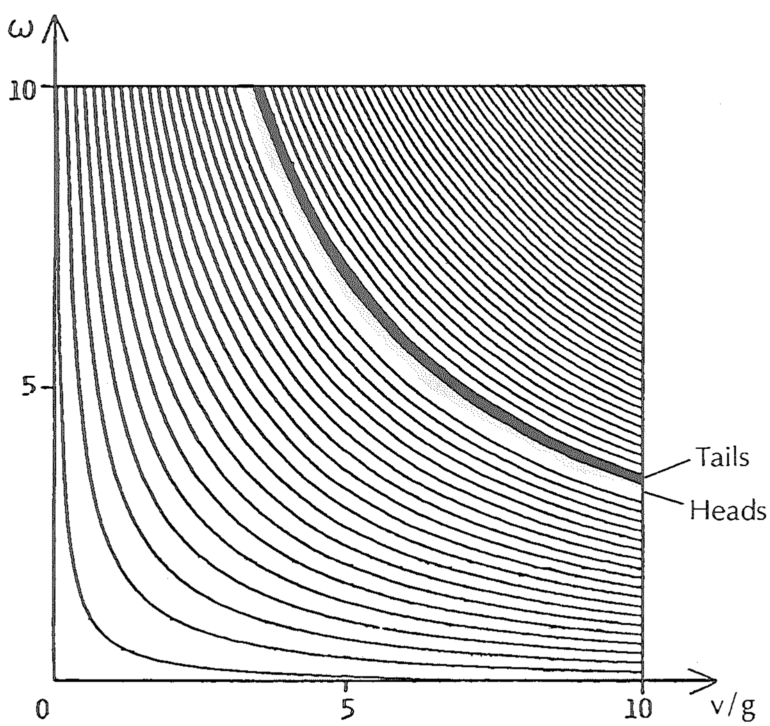

圖3 垂直地翻擲錢幣得到「正」「反」結果的圖解：橫軸是上擲起始速度v(g是重力常數)；縱軸是旋轉頻率。

乙 衡量對起始值的敏感性

一個動力系統對起始值的敏感性可以用所謂利安普諾納夫數(Liapunov number)來衡量。假如系統的狀態變量是 x，x 的起始值是x_0，動力系統的規律以函數 f(x)描述，那麼類似於方程式(A)的普遍疊代方程就是

$$x_n(x_0) = f(x_{n-1}(x_0)) \qquad \text{(B)}$$

其中$x_n(x_0)$是從起始值x_0開始，經過 n 輪疊代之後的狀態變量的取值。數學上可以證明，在 f 函數適合某幾個合理條件的時候，起始值x_0的微細變化對x_n所造成的差異$\Delta_n(x_0, \delta)$是

$$\Delta_n(x_0, \delta) = |x_n(x_0+\delta) - x_n(x_0)| \sim \delta\lambda^n \qquad \text{(C)}$$

式中的λ就是所謂利安普諾夫數，它是當$n\to\infty$時$|f'(x_0)f'(x_1)\ldots f'(x_{n-1})|^{1/n}$的極限(假如這極限存在的話)。顯然，假如$\lambda>1$，那麼起始的細微差別至終($n\to\infty$)時也會造成大差別，也就是說$x_n$對起始值是敏感的；否則，就不是敏感的。

由於對起始值有敏感性，渾沌和隨機現象的長期變化都不可能準確預測。然而，它們的「平均值」卻是可以計算的。例如：當$n=10^{42}$時，從方程式(A)算得的x_n是大於或是小於0.1？這個問題並不是那麼容易解決的，但是我們能算出它大於0.1的概率(probability)是79.5%。同樣，擲骰子的結果不可能預料，但是預測擲了多次後的平均點數卻很容易：它顯然是(1+2+...+6)/6=3.5！科學家對月蝕的長期預報，做得非常準確，但對氣象的長期預報，就力不從心了，這是由於前一類運動規律對起始值不具敏感性，而後一類恰恰相反。要注意的是，即使同一系統的運動規律，也往往對某些起始值具有敏感性，而對另一些起始值卻不然。所以，「天時和地利」是作出可靠預報的先決條件。對香港的投資者來說，這無疑是極之淺顯的道理。有趣的是，這些淺顯道理，卻包含了深刻的科學根據。讀者不妨自己考慮香港另一種熱門行業——占卦算命，是否可能有科學根據？當然，這個問題和占卦算命的存在價值，是不能混為一談的。

三 乾坤始奠

甲 決定性和隨機性的結合

既然簡單的數學模型或方程式可能產生複雜、貌似隨機的時間序列，那麼是否可以找出簡單的方程式來代表現實時間序列(例如每天平均氣溫)的整體變化呢？如果這個大膽想法能夠成功，它的意義和影響將是無可估量的：最少，筆者和他的同行——統計學家們，都可以退休了。

反過來看，正因為起始值的精確度原則上總有限制，所以單獨應用(B)方程式來描述現實世界是不合理的：它必須和統計學結合才符合現實⑨⑩。實現這結合的一個簡單方式是在動力系統狀態變量 x_n 的疊代過程中加入一個隨機性誤差項，即(為方便起見，不再記下 x_0)：

$$x_n = f(x_{n-1}) + e_n \qquad \text{(D)}$$

其中f(x)是由物理或其他理論所推導出來的決定性變化規律(例如，在方程式(A)中，$f(x) = ax(x-1)$)。e_n 則是具有同一分佈的獨立隨機變量：它代表獨立於狀態變量 x_{n-1} 的誤差項，而是由許多平時被忽略的微細效應，例如擲骰過程中的空氣流動、溫度漲落，等等造成。由於加上了 e_n，系統狀態變量 x_n 也從普通的變量，搖身一變成為一個「隨機變量」(random variable)：也就是說，它不復是單一數值的變數，而是一個可能具有許多數值的「分佈」(distribution)了。

決定性方程式(像(B)式)表示的是從一點走到另一點的單線運動軌跡，而隨機性方程式(D)代表的則是從一個隨機變量的分佈變為另一個隨機變量的分佈的「運動軌跡」。打個比方：前者可說是用尖鋼筆描繪出來的線條，而後者卻像是用醮了濃墨的毛筆在宣紙上揮灑出來的筆迹。如果數學家、物理學家、……研究的對象可以比喻為鋼筆素描，那麼統計學家研究的便是宣紙上多姿多采的國畫。

乙 在噪音中衡量對起始值的敏感性

「對起始值具有敏感性」是渾沌現象的中心概念，這概念能不能夠移植到帶有「噪音」的，即是在隨機環境中運動的動力系統來呢？要移植，也就是說要為由方程式(D)描述的隨機變量 x_n 尋找一條相當於(C)的方程式的話，顯然必須先界定兩個「分佈」之間的「距離」。也就是說，當 x_n 是分佈而非單值變數的時候，先要為(C)式的左邊界定意義。這界定倒不太難：我們其實並不需要另造一把量度「分佈」之間的距離的新尺，只需用一把久已存在的舊尺，即是宣農資訊理論(Shannon informations theory，這理論和美國中央情報局似乎有一點淵源)中的一些方法就成了。

假設隨機變量 x_n 的機率密度分佈函數是 $g_n(y \mid x_0)$，其中 y 是分佈函數變量，x_0 是 x_n 的起始值，那麼起始值相差 δ 的兩個分佈 $g_n(y \mid x_0+\delta)$ 和 $g_n(y \mid x_0)$ 之間的「距離」就可以用二者的所謂「負共同訊息量」(negative mutual information) $K_n(x_0, \delta)$ 來衡量。K_n 的定義是

$$K_n(x_0, \delta) = \int [g_n(y \mid x_0+\delta) - g_n(y \mid x_0)] \ln \frac{g_n(y \mid x_0+\delta)}{g_n(y \mid x_0)} dy \qquad \text{(E)}$$

當兩個分佈相同時，$K_n = 0$，也就是說二者之間的共同訊息量最大：分佈相差越遠，K_n 越大，也就是說共同訊息量減少。

我們最近所完成的一項工作⑪⑫，就是證明結合方程式(D)和(E)之後，倘若 δ 和下文的 σ^2 足夠小，則可得到如下結果：

$$K_n(x_0,\ \delta) \sim \delta^2 I_n(x_0) \tag{F}$$

其中稱為「非雪訊息量」(Fisher information)的 I_n 是

$$I_n(x_0) = \left[\frac{f'(x_0)^{2n}}{f'(x_0)^{2n}-1} \right] \frac{f'(x_0)^2-1}{\sigma^2} \tag{G}$$

而 σ^2 則是獨立隨機變量 e_n 的方差(variance)。

方程式(F)、(G)和(C)在結構上是類似的：用以測度敏感性的「距離」，即 Δ_n 和 K_n 都可以寫成只與決定性函數 $f(x)$ 有關的因子(即 λ^n 或 I_n)與及起始值變化 δ (或 δ^2)的乘積。從(F)和(G)式我們還可以看到下列三個要點。

(a) $|f'(x)|$ 原是量度決定性方程式(B)對起始值 x_0 敏感程度的主要因素。這一點在隨機環境中仍然沒有改變。

(b) 倘若 $|f'(x_0)| < 1$，則在 $n \to \infty$ 時 $K_n \to 0$。也就是說，倘若 $f(x)$ 在完全決定性狀況(即沒有隨機變量 e_n 的狀況)下對起始值不敏感，那麼在隨機環境中(即 e_n 出現時)，分佈的變化對起始值也不敏感。

(c) 倘若 $\infty > |f'(x_0)| > 1$，即 $f(x)$ 在決定性狀況下對起始值敏感，則在 $n \to \infty$ 時 K_n 趨於確定的極限 K_∞：

$$K_n \to K_\infty = \frac{f'(x_0)^2-1}{\sigma^2}\ \delta^2$$

這極限與 e_n 的方差 σ^2 成反比。因此，隨機環境的噪音越大，狀態變量 x_n 對起始值的敏感度就越少：噪音可以減低分佈對起始值的敏感程度！

用前面畫畫的比喻來說，在噪音環境中，倘若對應的鋼筆畫沒有起始值敏感性，則在宣紙上用毛筆所畫的國畫筆迹會隨 $n \to \infty$ 而逐漸尖細起來，以致和對應的鋼筆畫再也沒有分別！否則的話，則國畫筆迹會變得越來越粗，以致達到一個極限粗度為止。而這極限粗度，卻是和噪音的大小成反比的。這就是我們這項工作的奇特圖象說明。

丙　隨機王國中的真實

通過基本方程式(D)所獲得的新工具既豐富了統計學，也把渾沌理論從決定性的牢獄解放出來，將之帶到隨機的王國。在這個新國度裏，無序之中可以有序，而有序之中也可以無序，這一美妙的道理，正得到進一步的發揚。事實上，擲骰子的例子可以用經典力學寫成一組聯立微分方程組，從而可以推出決定性的渾沌解，這樣，其結果的偶然性也可以初步得到解釋。但是，這只是一個理想化的方程組，因為風速、濕度、氣溫等「環境條件」都還未曾包括在內。

所以，加上隨機的運動誤差項，會把這理想化的方程組變得更符合客觀情況。渾沌理論的優點在於它能夠用理想化的確定性模型來初步描述弱誤差的運動。但是，這也是它的限制所在，因為在誤差稍強的時候，它就不再真實，而必須和統計學結合才有意義了。

鳴謝：筆者感謝林埜博士、陳方正博士和陳公適教授對本文提出寶貴意見，但錯誤仍全部由筆者負責。

註釋

① I. Stewart: *Does God Play Dice?* (Penguin, 1992).

② J. Gleicke: *Chaos: Making a New Science* (Viking, 1988)，中譯本《混沌，開創新科學》(張淑譽譯，上海譯文出版社，1990)。

③ 郝栢林：〈世界是必然還是偶然的？——混沌現象的啟示〉，《二十一世紀》，第3期（1991年2月），頁85–96；楊綱凱：〈無序、耗散與時間箭頭〉，《二十一世紀》，第4期（1991年4月），頁65–78。

④ Li, T.Y. and Yorke, J.A.: "Period Three Implies Chaos," *American Mathematical Monthly*, vol. 82, pp. 988–92 (1975).

⑤ 《莊子·應帝王》：「南海之帝為儵，北海之帝為忽，中央之帝為渾沌。……儵與忽謀報渾沌之德。曰：人皆有七竅，以視聽食息。此獨無有，嘗試鑿之。日鑿一竅，七日而渾沌死。」

⑥ 例如《淮南子·詮言》：「洞同天地，渾沌為樸，未造而成物，謂之太一」；《列子·天瑞》：「氣形質具而未相離，故曰渾淪」；《白虎通・天地篇》：「混沌相連，視之而不見，聽之而不聞」；曹植〈七啟〉：「夫太極之初，渾沌未分」，等等。

⑦ May, R.M.: "Simple Mathematical Models with Very Complicated Dynamics," *Nature*, vol. 261, pp. 459–67 (1976).

⑧Poincaré, H.: *Science and Method* (Dover Publications, 1900)。這是一本非常值得推薦的討論性文集，出自大師手筆，百看不厭。

⑨ Tong, H.: *Nonlinear Time Series: A Dynamical System Approach* (Oxford University Press, 1990)。這是筆者的拙作，也似乎是試圖把統計學的非線性時間序列理論和動力學結合起來的唯一一本書。

⑩ Chan, K.S. and Tong H.: "A Note on Noisy Chaos," *Journal of Royal Statistical Society*, Series B, vol. 56 (in press)。該文為隨機方程式用在渾沌理論上的奠基性論文。

⑪ Yao, Q. and Tong, H.: "Quantifying the Influence of Initial Values of Nonlinear Prediction", *Journal of Royal Statistical Society*, Series B (in press)。

⑫ Yao, Q. and Tong, H.: "On Prediction and Chaos in Stochastic System", invited paper to be presented at the Royal Society Discussion Meeting on Chaos and Forecasting, 2–3 March 1994 in London.

湯家豪　1944年出生於香港，英國曼徹斯特大學數學系博士，從事統計學研究凡二十五年，發表論文及專著將近百篇，分別於1983年及1993年獲選為國際統計學會會員及國際數理統計學會院士。近年來從事統計—渾沌的邊緣研究。1982年出任香港中文大學統計系首任講座教授及系主任；1986迄今在英國肯特大學任統計系講座教授並歷任數學與統計學研究所所長。