再談黃金分割

◎ 陳之藩

一　黃金分割的多種表示

如果從費布奇(Fibonacci)數列創始時算起，黃金分割迄今已是七八百年的發展歷史了。費布奇的數列，我們再寫一次如下①：

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233\ldots\ldots \tag{1}$$

費布奇死於1250年。他死後的三百八十四年，吉若特(Girard)的下列公式才出現②：

$$U_{n+1} = U_n + U_{n-1} \tag{2}$$

到了十八世紀，畢內(Biron)解出上式得到③：

$$U_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right] \tag{3}$$

於1753年，辛莫蓀(Simson)發現前後兩項之比為④：

$$\frac{U_n}{U_{n+1}} = \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+1\ddots}}} \tag{4}$$

到了十九世紀末，陸卡司(Lucas)於1876年才導出⑤：

$$x^2 + x - 1 = 0 \tag{5}$$

的二根是黃金比。

這五種數學表示法竟要七八百年才發展起來。五式均說明黃金分割，卻各有各的發展方向。第(1)式是由兔子的衍生問題而引出的。各數均在實數領域。第(3)式是第(2)式之解。顯然的，第(3)式是在無理數領域。第(5)式則是黃金比最簡潔的表示法。

二　連分式表示的黃金比

我們在此特別注意一下第(4)式：它是每項均為1的連分式。我在二十多年前，曾把連分思想發展成廣義反

饋思想，用以簡化系統模型。單輸入單輸出系統的論文是1966在密西根發表⑥，多輸入多輸出系統的論文是1972年在巴黎發表⑦。因為對連分式的熟悉，難免看黃金比時，也企圖用連分思想來分析它。於是，我用以下方式來思考：

$$\frac{1}{1+1} = \frac{1}{2} \qquad (4a)$$

$$\frac{1}{1+\frac{1}{1+1}} = \frac{2}{3} \qquad (4b)$$

$$\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+1}}} = \frac{3}{5} \qquad (4c)$$

$$\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+1}}}} = \frac{5}{8} \qquad (4d)$$

左邊係連分展開，而右邊卻正是費布奇數列所組成。只是我這獨立想出的連分展開與黃金分割，比起辛莫蓀的論文來晚了二百四十多年。這是後來在查到辛莫蓀的原文時才知道。

重新發現的東西，自無貢獻可言。可是重新發現之際，依然有創作時的快樂。快樂之餘，不免悵惘，但又推想，比起辛莫蓀時代來，倒也有幸運的地方。即是我們現在有了「分維幾何」的觀念。第(4)式並不是幾何圖形的的大小相似，而是符號「1」的重疊出現構成圖形。由這符號式子令人聯想到了「樹」，聯想到麥克瑪洪(McMahon)的工作⑧。

三　賈憲的三角形與黃金分割

在本世紀開始時，1900年，德國大數學家希爾伯特(Hilbert)在巴黎數學會上舉出當時數學上的23個待解決的難題，其中的第十題是有關數論的。在1970年被蘇聯的馬特斯維(Matiyasevic)解決了。在他解析第十問題中，用到了費布奇數列，也用到了中國的餘式定理。

1970年以後，中國大陸似乎對費布奇數列及中國餘式定理均感興趣。在研究上也多所貢獻。我們可以猜想，這些現象可能與希爾伯特的第十問題之得到確切否定答案有關。

華羅庚對黃金分割提倡最力。但華羅庚有關黃金分割的著作遲至1981及1984才出版⑨，我雖力加搜求，至今仍無緣讀到。我在這裏要談的，還不是華羅庚的努力與貢獻，而是想追溯在中國的數學史中，本來可能發展成黃金分割的思想，卻沒有發展起來的事實。

我在這裏要談的，是想追溯在中國的數學史中，本來可能發展成黃金分割的思想，卻沒有發展起來的事實。

我們知道巴斯卡三角形(如圖1所示)。比巴斯卡三角形早600年，中國有位賈憲創出同樣的三角形(如圖2所示)。這是大家在學習二項式展開時都學得到的。我們如比較圖1巴斯卡的三角形與圖2賈憲的三角形，基本上可以說完全相同，它們的些微差別是在三角形的頂角上。巴斯卡三角形的頂角是90°的直角；而賈憲的三角形的頂角是半個直角或45°銳角。換

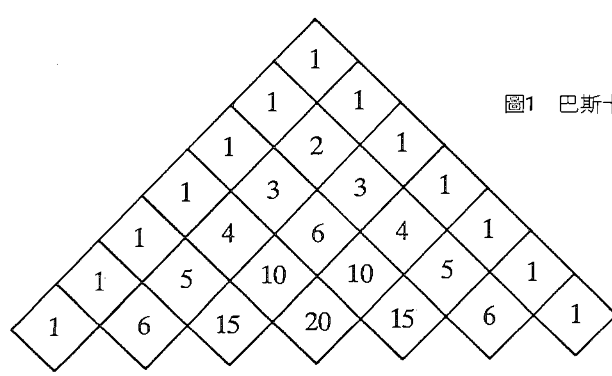

圖1　巴斯卡三角形

句話說，巴斯卡三角形比較矮坍，而賈憲三角形比較高聳。

我在此想指出的是：雖是這小小的區別，但由巴斯卡三角形看不出黃金比來；可是由賈憲三角形卻很清楚的看出費布奇的數值來。我現在把朱世傑在1303年的賈憲三角形(刊在《四元玉鑒》)的原三角塔圖抄在這裏(圖2)，然後在圖上我作幾條平行線與水平成45°向東北方伸展：在第一虛線末端是「本積」的1用阿拉伯字標出；在第二虛線末端是「商實」的1用阿拉伯字標出；在第三虛線末端是「平方積」的一加上「方法」的一是為「2」，第四虛線末端是「平方積」加上中間項的2，成為3……。然後是第五、六、七虛線末端分別為5, 8, 13……等。以此類推形成阿拉伯字所示的橫寫數，費布奇數列赫然出焉。我再強調一下：這些與水平成45°虛線只有在賈

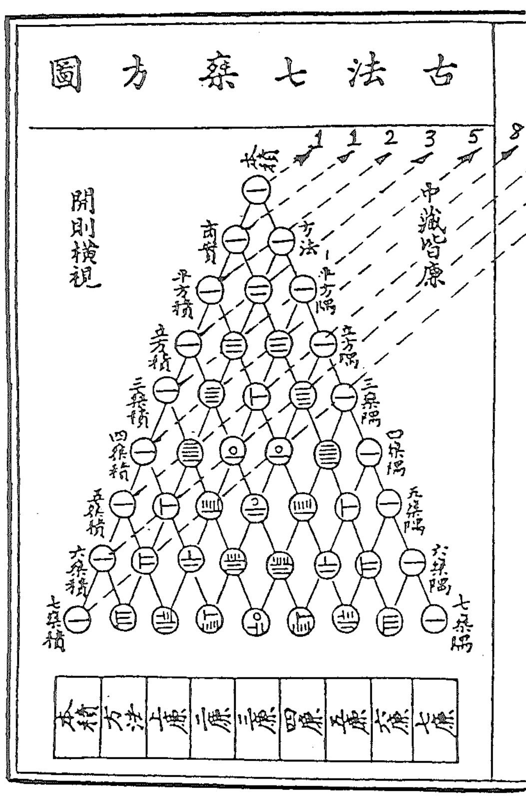

圖2　賈憲三角形與作者後加的虛線及所顯現的黃金數。

圖3　賈憲三角形流入日本後日文註解

憲三角形可以做出；在巴斯卡三角形上卻不易，甚或不能做出來。朱世傑是元朝人，賈憲三角形後來傳到日本，日本也未做出我所標示的虛線來(見圖3)。因此，黃金比可以說在中國與日本均有機會出現，卻也均失之交臂了。

四　五行與黃金分割

中國的書，從經典到小說，常常出現一個特殊的數，即是「七十二」。孫悟空的七十二變可以說是小說中的代表。至於經典中的七十二，聞一多與他的朋友們有過一篇集體創作：篇名就叫〈七十二〉。他搜羅很多有關七十二的古典句子⑩：《莊子·天運篇》有七十二君；〈外物篇〉有七十二鑽；《史記》說高祖左股有七十二黑子；《續漢書》有七十二代；《孔子世家》載門人身通六藝者七十二人；《續漢書》

有七十二風；《論語考讖》中有七十二家為里；《舊唐書》有七十二侯；《黃帝出軍訣》有黃帝戰蚩尤七十二戰而後斬蚩尤……。為甚麼總是七十二？《孔子家語·五帝篇》：「天有五行，水火金木土，分時化育，以成萬物。」注曰：「一歲三百六十日，五行各主七十二日也，化生長育，一歲之功，萬物莫敢不成。」

更具體的解釋是：五帝：東方木，色蒼，七十二日；南方火，色赤，七十二日；中央土，色黃，七十二日；西方金，色白，七十二日；北方水，色黑，七十二日。

七十二者是一年三百六十日的五等分數。我抄這一堆閒一多的考證是在說七十二與五行有關。中國古人，尤其是漢儒離不了五行，而5除360日正是72。

我們知道黃金比可以組成黃金矩形。黃金矩形可以組成黃金矩形套。圖4所示即是黃金矩形套所組成的螺形線：它代表海螺殼紋、藤的卷曲、人的耳輪、蛋白分子的排列等，這是大家很熟悉的。

但並不為人熟知的，還有黃金三角形。黃金三角形是一等腰三角，底與腰之比是黃金比，也就是說頂角為36°，兩個底角各為72°。在這裏出現了72的數目。

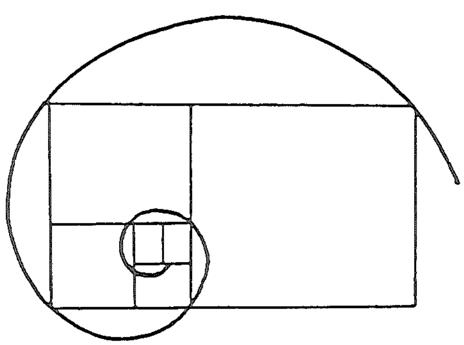

圖4　黃金矩形套與螺旋曲線

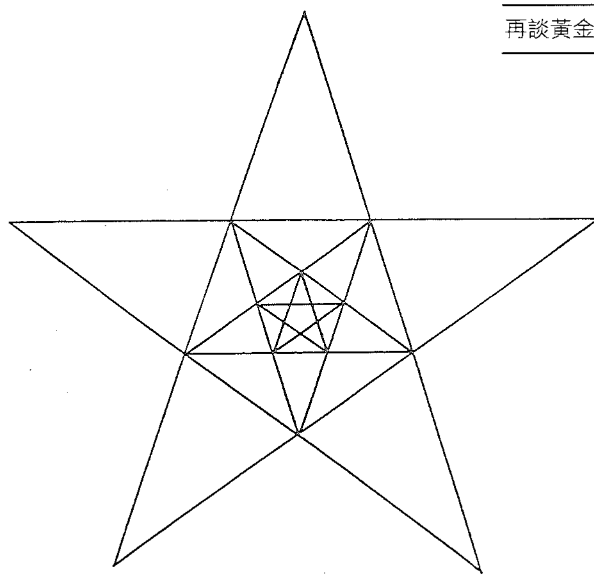

圖5　圓分五等分形成星形五角，現出大大小小黃金三角形。

用黃金比做圓內正五邊形是準確常用的方法。如果把五邊的尖端連對角線，即成五角星形，如圖5所示。這個星形顯示出大大小小的黃金三角形來。

漢儒對五行特別喜愛，由72數字之使用可以看出；正如西人喜愛五角星形一樣。令人喜愛的原因是它隱藏着黃金三角套。

中國雖沒有明顯的述說黃金比的術語，卻清楚的深入了五行的基本術語72。天干、地支、五行、八卦等配合起來，形成了黃曆文化。如此看來，黃曆可以說起於「美」的考慮，多於對「真」的計量。

漢儒對五行特別喜愛，由72數字之使用可以看出；正如西人喜愛五角星形一樣。令人喜愛的原因是它隱藏着黃金三角套。

拿360當作365自然誤差甚大，修正這個誤差時，陽曆就出現了。陽曆既然以太陽系的觀測為準，就不能不帶進二十四個節氣，加上農事的實證，二十四個節氣就進入黃曆了。二十四節氣是陽曆，是因農事的準時實現而變得重要，它與美學或七十二是

無關的；而只與太陽與地球的相對位置有關。時下的黃曆可以說由兩部分組成：一部分是在於「美」——與72或黃金比有關；另一部分是基於「用」——與節氣或農事有關。

五 跋

這篇〈再談黃金分割〉是為了答覆四川蕭昌建教授的投書問難而寫。他對我的駁難主要有三點：第一點是，他認為不只是黃金比的二進位表示法才有我說的對稱，其他比數也還有。這一駁難正如台灣大學張海潮教授在一年前所提的，我在台灣的《聯合報》上以〈令人失眠的數〉一文答覆過，便不在此重提了⑪。

蕭昌建教授對我的駁難主要有三點：第一點是，他認為不只是黃金比的二進位表示法才有我說的對稱，其他比數也還有。第二駁難是在說數的本身與代表它的符號無關。但對於第三駁難他顯然是混淆了有理數的式子與無理數的式子。

蕭昌建教授的第二駁難是在說數的本身與代表它的符號無關。但試看第(4)式，如果說它是符號罷，它卻是樹的規模。用連分式的許多「1」來表示黃金分割，才可能看出樹的形式。如用其他4種表示則是完全看不出的。粗看起來，數的本身與代表它的符號之間的關係是如蕭教授的說法；可是如果符號只有「1」出現或只有1與0出現，就要另當別論了。由辛莫蓀的這一發現，對蕭教授的思路應有所啟示。

蕭昌建教授的第三駁難是混淆了有理數的式子與無理數的式子。前述五式雖都是黃金分割，但第一式是在有理數範圍，第三式是在無理數範圍，換句話講，如果用第(3)式，則需在無理數範圍；如果用第(1)式，則需在有理數範圍。在水中研究魚時，不可用鳥槍打；在空中研究鳥時，不可用魚網兜。說這是遊戲規則也可以，是辯論常識也可以。

註釋

①⑤ 陳之藩：〈黃金分割也是對稱？〉，《二十一世紀》，總第14期，1992年12月。

②⑨ 吳振奎：《世界數學名題欣賞(2)——「斐波那契數列」》（九章出版社，1986）。

③④ 伏洛別也夫：《斐波那契數》（中國青年出版社，1954）。

⑥ C.F. Chen and L.S. Shieh: "A Novel Approach to Linear Model Simplification", Joint Automatic Control Conference (Michigan, 1966); published in *International Journal of Control*, vol. 8, no. 6 (1968), pp. 561–70.

⑦ C.F. Chen: "Model Reduction of Multivariable Control Systems by Means of Matrix Continued Fractions", *International Journal of Control*, vol. 20, no. 2 (1974), pp. 225–38 (presented at 5th Congress of Automatic Control, Paris, France, 1972).

⑧ R.T. Stevens: *Fractal Programming in C.* (Redwood City, CA.: M&T Books, 1989), pp. 227–38.

⑩ 聞一多著：《聞一多全集》，第一冊，〈神話與詩〉（上海：開明書局，1948），頁207–20。

⑪ 陳之藩：〈令人失眠的數〉，《聯合報》，1994年4月6日。

陳之藩 河北霸縣人，天津北洋大學畢業，英國劍橋大學哲學博士。曾任香港中文大學電子系講座教授，美國休士頓大學電機系教授，現任美國波士頓大學應用科學系教授。著有《控制系統通論》（Prentice-Hall出版）及《陳之藩散文集》（台灣遠東圖書公司出版）。