到費馬定理之路

孟夏的劍橋，濃蔭低垂，闃寂無嘩。去年(1993)六月卻自這兒傳出一則轟動數學界以至全世界的消息，普林斯頓大學的懷爾斯(Andrew Wiles)在當地牛頓數學研究所一連三天作了一個題為「模形式、橢圓曲線和伽羅瓦(Galois)表示」的報告，結束報告前他在黑板上寫下一道簡單的著名方程，然後說：「我就談到這裏吧。」全場寂靜了幾秒，接着掌聲迸發，如雷不絕，因為席上的專家聽眾都意會到他宣稱已經解決了數學史上最大的懸案，即是證明了法國數學家費馬(P. Fermat)在350年前提出來卻「因為書頁旁空白沒足夠空位」而沒有寫下證明的「定理」:方程

$$x^n + y^n = z^n \qquad \text{(A)}$$

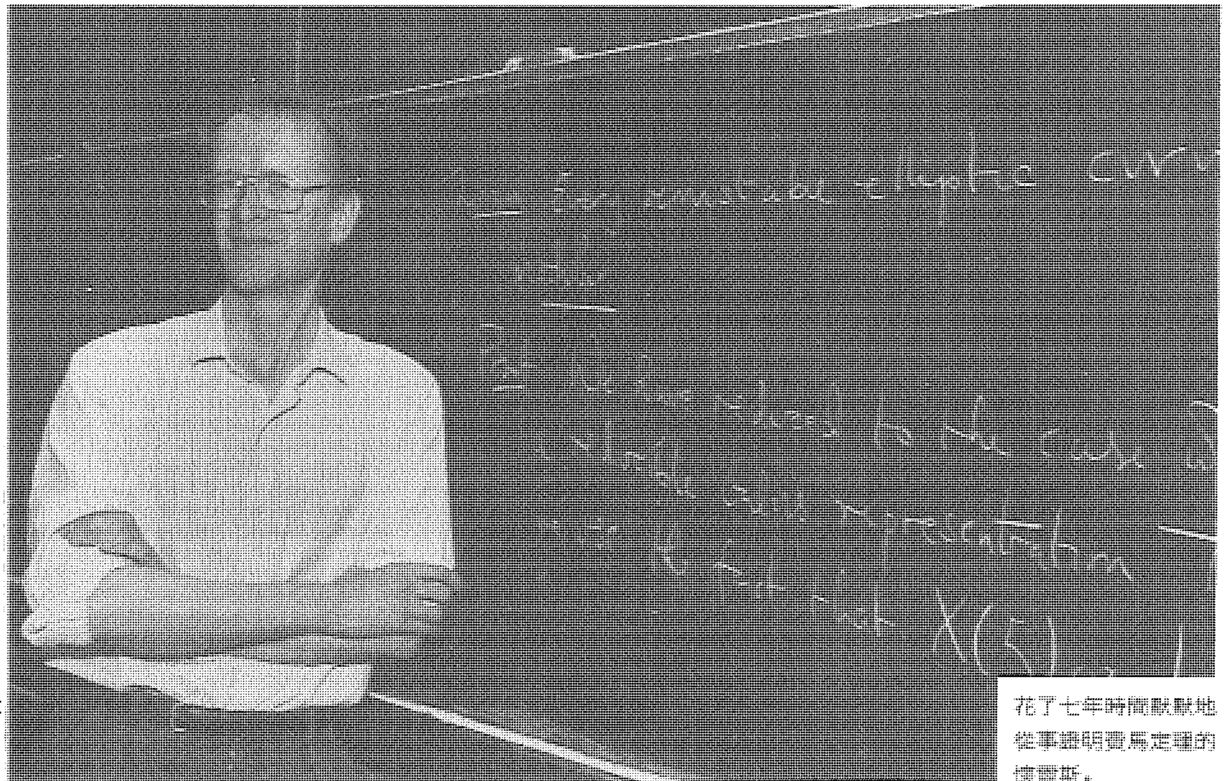
對所有大於 2 的 n 都沒有非零(即 x, y, z 都不是零)整數解。這就是所謂「費馬猜想」或稱「費馬最後定理」。

顯然，若n=b(或n=a)時(A)無解，則n=ab時(A)亦無解，否則$(x^a)^b+(y^a)^b = x^{ab}+y^{ab}= z^{ab} = (z^a)^b$，即n=b時(A)有解，引致矛盾。大家知道n=2時(A)有解(例如 x=3, y=4, z=5)，因此要證明費馬猜想只需考慮n=4和n=p(p是奇素數)的情況。可是，從十七世紀中葉至十九世紀中葉的二百多年間，經過歐拉(L. Euler)、狄利克雷(P.G.L. Dirichlet)、勒讓德(A.M. Legendre)、拉梅(G. Lamé)諸位大師的努力，也只證明了n=3, 4, 5, 7 四個特例，進展可說十分緩慢，這也說明了問題的困難程度。

1847年3月法國數學家拉梅提出運用「割圓數」算術考慮方程(A)，並宣稱可由此證明費馬猜想。割圓數是所謂「代數整數」的一類，代數整數就是全部整數係數首一多項式方程 $x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1x + a_0 = 0$ 的解所構成的數集。到了5月下旬，德國數學家庫默爾(E.E. Kummer)去函指出代數整數的因子分解不一定是唯一的，他還舉出p = 23時割圓數的不同因子分解為例，從而推翻了拉梅的證明。其實，庫默爾對割圓數早有研究，更進一步提出「理想數」的概念，證明理想數有因子分解唯一性質。利用這件新工具，他證明 p 不超過100時(除了p = 37, 59, 67三個例外)費馬猜想是正確的。這樣，由於新方法出現，費馬猜想的研究向前躍進一大步。至1980年為止，數學家證明了 p 不超過150,000時猜想是正確的。但更重要的是庫默爾的研究開展了理想子環理論，其後演進為近代抽象代數的核心理論，廣泛影響了代數以至有關領域的進展，這可說是費馬猜想帶來的意外收穫。

但這樣對逐個 p 求證決非至終解決之道，必須另尋新意念才可以求突破。1922年英國數學家莫德爾(L.J. Mordell)提出一項猜想，大意是說像(A)那樣的方程在複空間(即 x, y, z 都是複數時)所產生的曲面倘若具有多於一個「洞」(方程(A)當n＞3時是對的)，則方程只有最多有限組整數解(成比例的解組不算)。近六十年後(1983)德國青年數學家法爾廷斯(G. Faltings)終於證明這項猜想。據此別的數學家還證明(A)的非零整數解存在的機率是零。可是，這距離至終目標仍頗遙遠。

過去十年間，費馬猜想的解決似乎在望了，弗瑞(G. Frey)證明倘若(a, b)是(A)(n = p)的非零整數解，他便找到一條具備某些特殊性質的橢圓曲線：$y^2 = x(x + a^p)(x - b^p)$。里比特(K.A. Ribet)在1986年證明：假如所謂志村(G. Shimura)—谷山(Y. Taniyama)—韋依(A. Weil)猜想(即全部橢圓曲線都是「模曲線」)成



Denise Applewhite, Princeton University

花了七年時間默默地從事證明費馬定理的懷爾斯。

立，則弗瑞曲線不存在，亦即(A)的非零整數解不存在。因此，費馬猜想成立與否，關鍵落到志村—谷山—韋依猜想上去了。本文開首提到的懷爾斯得悉里比特的工作後，意識到費馬猜想並非孤立而是涉及代數、幾何、分析的中心問題，便專心矢志攻克這難題。經過足足七年工夫，他終於證明了弗瑞曲線是屬於所謂半穩定橢圓曲線，而對這一類特殊橢圓曲線上述猜想成立，因而費馬定理亦成立。這便是去年六月他在劍橋所作的報告，轟動了數學界。

然而，懷爾斯長達二百多頁的證明正確嗎？其中是否完全沒有錯漏呢？約三個月後，電子網絡上已傳言證明可能有漏洞。12月4日懷氏本人發出電子信件，承認證明裏關於某個群的計算仍欠完整，但聲言有信心他能彌補這缺陷，並且會於年初在普大的研討班上作詳盡報告。跟着，從12月18日至21日，由於丘成桐的推動促成，香港中文大學數學研究所召開了一次「橢圓曲線及模形式」的國際數論會議，齊集了世界各地專長於這方面的大部分專家討論費馬定理的最新發展，在19日特別集中討論懷爾斯的工作。與會者並不全部同意懷氏本人的樂觀看法，上文提到的法爾廷斯更認為漏洞並不簡單，可能頗費時日才能解決。

350年來，解決費馬猜想的路既漫長也曲折，但人類在這路上開拓和發現許多豐富的新理論。我們現在是接近終點嗎？抑或還要走更多的路呢？恐怕誰也難以斷言。但正如1913年霍布森(E.W. Hobson)敍述數學史上另一個著名難題(「化圓為方」)時所說：「我們領會每一代人遭逢的困難：由於時代局限，他們的方法不足以令他們的成就超過他們所能達到的界限。但我們看到，每當新的方法出現後，一代新人便會馬上採取新觀點繼續審察同一問題。在回顧這段歷史時，給我們印象最深刻的是人類心靈在這種集體意義下所具備的巨大耐性。」毫無疑問，對費馬猜想，人類心靈也會顯示巨大耐性的。

——蕭文強
香港大學數學系