

光天化日下的「不軌行為」： 太陽系的「多體問題」

彭金滿 王永雄 陳天機*

香港中文大學

一、前言

在前兩篇文章裏，筆者討論了中古時代地心論的沒落和自然科學的興起（陳天機、彭金滿、王永雄，2007；陳天機、王永雄、彭金滿，2007）。我們現在可以說，中古時代的看法：「地球是整個宇宙的靜止中心」，此理論固然自大、荒謬；但若作片面的修改，將上句的「地球」用「太陽」或「銀河星系中心」等字眼取代，結果仍然是錯誤的——我們找不到在宇宙裏絕對靜止的中心；當真能夠取代上面那句話的，是「虛心」的治學態度。

牛頓力學解決了經典的「兩體問題」，它同時推論，修正，並大大推廣了開普勒（J. Kepler）的太陽系橢圓軌道三大定律。¹但萬有引力的影響無遠不屆，太陽系其實應該是一個「多體問題」，

* 彭金滿，香港中文大學物理系導師。

王永雄，香港中文大學大學通識教育部通識教育基礎課程副主任。

陳天機，香港中文大學大學通識教育部榮休講座教授。

1 開普勒（1571–1630）。柯斯勒（Koestler, 1959）生動地描述了開普勒一生坎坷的遭遇和偉大的貢獻（p. 225–422）。

而「兩體問題」所產生的軌道在天體的相互影響下變形，橢圓軌道往往只能說是粗略的「初步漸近」而已。

不少這些「多體問題」可以用按部就班、煩而不難的「攝動」（perturbation）演算法來解決。但此演算法並非萬能，例如：兩顆鄰近繞日天體軌道的週期如成整數比，便可能產生出人意表、絕不重複的「混沌軌道」；而「攝動」演算法對於此計算顯得無能為力。這些「不軌行為」在太古時代可能已主宰了太陽系行星的形成，影響了地球生物過去的兩次大絕滅，更可能在遼遠的將來，致令所有行星軌道趨向混沌。

除了這些問題之外，還有一個影響軌道的枝節問題：水星軌道顯出牛頓力學無法完滿解釋的「近日點進動」（advance of the perihelion）；但廣義相對論指出太陽重力扭曲了空間，供應了經典力學所無的修正數項。

二、經典力學裏的「兩體運動」

開普勒生於中古動盪的亂世，命運坎坷。他獨力研討，經屢敗屢戰後，終於用橢圓軌道表達了布拉赫（Tycho Brahe）的精確肉眼觀察數據。²這是劃時代應用數學工作的勝利，成績昭彰，功不可沒。但他所提出的橢圓軌道三大定律，目的只在於描述肉眼觀測下的太陽系，不但不能與現代儀器的精確度相比，更沒有當真解釋「為甚麼」。

牛頓（I. Newton）卻將所有「兩體問題」化為經典力學的推論。³「兩體問題」討論兩個只互相影響的質點運動，這就是說：在已知

2 布拉赫（1546–1601）。

3 牛頓（1642–1727）。

兩個只互相影響的質點 (P_i, P_k)，質量和某開始時間 (t_0) 的位置和速度的前提下，以求它們在此後任何時間的位置和速度。我們通常處理的相互影響，是「反平方」(inverse-square) 的引力，尤其是萬有引力。⁴

1679年，胡克 (R. Hooke) 首先提出反平方萬有引力定律 (陳天機、王永雄、彭金滿，2007)；⁵ 八年後 (1687年)，牛頓出版了劃時代的《原理》，以他的三大經典力學定律配合萬有引力定律，解答了「兩體運動」問題，從而修正了開普勒的行星軌道三大定律。「地心論」與「日心論」之爭從此塵埃落定。牛頓理論不限於太陽系的行星系統，也適用於太陽系內，行星與衛星 (例如地球與月亮) 的互動，和太陽系外，遙遠的星際空間；它也讓我們寫出多體問題的方程式，這些方程式後來引出了應用數學的「攝動」技術 (見下文「多體問題的『攝動』處理」一節) 和跨學科、革命性的複雜性理論 (見下文「混沌現象、蝴蝶效應與共振」一節)。

經典力學簡明易用，三百年以來都被當作金科玉律，直至十九世紀末葉。現在我們知道，量子力學在微觀世界裏，以及廣義相對論在高速、超重的領域都分別取代了經典力學；然而在日常環境中，經典力學處理實驗觀測數據，已經準確非常，大可放心使用；而且受現代物理學的影響，往往可以寫成修正數項，介入經典力學的算式。一個顯著的例子是水星繞日運動的詮釋 (見下文「水星軌道的『近日點進動』」一節)。

4 學者往往用「開普勒問題」(the Kepler problem) 來指涉「反平方引力」下的兩體問題，而「反平方引力」也包括電荷間的吸引力 (庫倫定律 [Coulomb's law])。

5 胡克 (1635–1703)；詳情可參考陳天機、王永雄、彭金滿 (2007)。〈太陽系理論的突破〉。《大學通識報》，第3期，頁133–151。

(一) 萬有引力與環繞質量中心的兩條軌道⁶

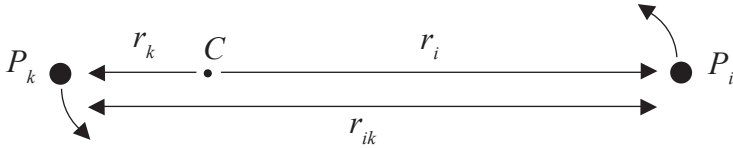


圖2-1 質點 P_i 和 P_k 的軌道 ($m_i \ll m_k$)

開普勒第一定律說：行星循橢圓軌道繞日運行。牛頓的「兩體問題」解答更加全面：任何兩個質點 P_i （質量= m_i ）和 P_k （質量= m_k ）之間都存在反平方引力。兩質點都分別環繞著共同的質量中心 C ：

$$\text{若 } \overline{CP_i} \equiv r_i, \overline{CP_k} \equiv r_k, \overline{P_iP_k} \equiv r_{ik} \equiv r; M \equiv m_i + m_k, \mu = m_i m_k / (m_i + m_k), \\ \text{則 } m_i r_i = m_k r_k = \mu r_{ik} \text{。}$$

兩個質點的軌道可以是橢圓、拋物線或雙曲線（的一臂）；他們的質量中心、兩條軌道都在同一平面上，擁有相同的離心率 e 。⁷

本文主要討論的是產生橢圓軌道的兩體問題——兩質點描出兩個相似的橢圓軌道，兩者更有一個相同的焦點：若 a_i, a_k 是 P_i, P_k 軌道的半主軸， $a_i + a_k \equiv a_{ik}$ ，則

$$m_i a_i = m_k a_k = \mu a_{ik} \text{。}$$

6 關於「牛頓力學兩體問題」的詳盡討論見Carroll, B. W., & Ostlie, D. A. (2007). *An introduction to modern astrophysics* (PIE, 2nd ed., pp. 41–49). San Francisco: Pearson.

7 見本文附錄I；通過兩質點有無限多的平面，實際上的平面是由「初始條件」決定的。

我們現在討論（行星—太陽）的特例，以下標符號 \odot 代表太陽：⁸

$$P_k \equiv P_{\odot}; 0 \leq \rho \equiv m_i / m_{\odot} \ll 1;$$

$$\text{則 } a_i = \mu a_{i\odot} / m_i = a_{i\odot} / (1 + \rho), a_{\odot} = a_{i\odot} - a_i = a_{i\odot} \rho / (1 + \rho)。$$

圖2-2描出兩條軌道：

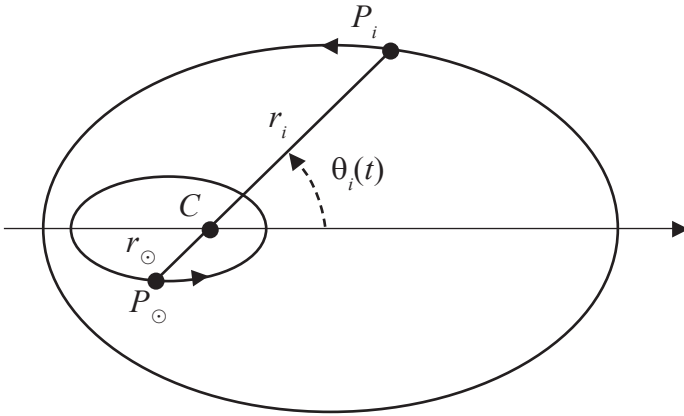


圖 2-2 雙橢圓軌道示意圖

請注意兩軌道不但有相同的離心率，兩條半主軸（長度之比是 ρ ）也同在一直線上，而且行星橢圓軌道的左焦點也是太陽橢圓軌道的右焦點，同時也是兩質點的質量中心C。運動時，三點（ P_i, C, P_{\odot} ）維持共線關係。

兩質體在軌道上運行時三點共線的限制是： $\theta_{\odot}(t)$ 恰好與 $\theta_i(t)$ 相差 180° 。

8 本文採用下列的常用希臘字母： Δ （“delta”，差距）； ε （“epsilon”，小於1的參數）； μ [“mu”，約化質量（reduced mass）]； ρ （“rho”，質量比）； θ （“theta”，角）； λ （“lambda”，李雅普諾夫指數）。

這兩體系統的總能量與離心率 e 竟然完全無關：

$$E = -G \frac{m_i m_{\odot}}{2a_{i\odot}}$$

(二) 開普勒行星軌道的擴充

牛頓的兩體系統理論與開普勒理論在概念上有基本差異。開普勒理論根本沒有動用「質量」的概念，而且只限於太陽系的行星系統；牛頓理論卻適用於任何兩體系統，而且由於質量的介入，遠為精密。開普勒崇拜太陽，說「太陽是中心」；牛頓卻說「質量中心才是中心」，兩體系統的質量中心在兩個質點之間的空間。就太陽與單個行星組成的兩體系統而論，這空間往往在太陽光球裏面，但木星—太陽系統的質量中心卻位於光球之外。⁹假如兩質點質量相同，牛頓理論便說它們各繞質量中心以橢圓軌道運行，質量中心恰在兩質點正中的空間，開普勒的理論卻完全沒有兩條軌道的觀念。

開普勒的理論相當於牛頓兩體問題中的一個極限，在這極限裏一個質點的質量趨於0。我們也可以反過來說，另一質點的質量趨於無窮。簡單地說， $m_i/m_{\odot} \equiv \rho \rightarrow 0$ 。我們因此輕易地得到「開普勒行星軌道」的半主軸：

$$a_{i,\rho \rightarrow 0} = \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{a_{i\odot}}{1 + \rho} = a_{i\odot} > a_i$$

行星軌道略小於「開普勒行星軌道」： $a_i/a_{i,\rho \rightarrow 0} = 1/(1 + \rho)$ 。行星質量愈大，則 ρ 愈大，在已知 $a_{i\odot}$ 之下，軌道因而愈小。在太陽系裏，軌道

⁹ 太陽系中木星質量最大，木星質量是 1.899×10^{27} kg，或等於 $317.8 M_{\oplus}$ （ M_{\oplus} = 地球質量）；太陽質量是木星的1,048倍， $a_{\odot} = 0.0050$ AU，略大於太陽的光球半徑（0.0047 AU）。其實兩體運動並沒有介入「光球」的概念，所牽涉到的只是半徑為0的質點。

變小的程度很微：根據 $\rho = m_{\text{木星}} / m_{\odot} \leq 0.001$ ，則 $1 > a_i / a_{i, \rho \rightarrow 0} \geq 0.999$ ；但仍可以觀測出來。

又因 $a_{\odot} / a_{i\odot} = \mu / m_{\odot} = \rho / (1 + \rho)$ ，若使 $\rho \rightarrow 0$ ，太陽軌道的半主軸變成

$$a_{\odot, \rho \rightarrow 0} = 0$$

得到的整條「開普勒太陽軌道」只是一點！

（三）開普勒第二定律

開普勒第二定律說： $r_{i\odot}$ 在單位時間 Δt 內掃過相等的面積（ $\Delta A_{i\odot}$ ）。這話相當神秘—— P_i 是不是一面行走，一面偷偷地在計算面積呢？

牛頓力學證明 P_i 在橢圓軌道上運動所引起的角動量是守恆（維持不變）的。角動量守恆自然而然地在 Δt 內使 r_i 掃過相等的面積 ΔA_i ，也使 r_{\odot} 掃過相等的面積（但請注意 ΔA_i 並不等於 ΔA_{\odot} ），當中所涉及的數學細節在此不贅。

（四）開普勒第三定律的修正

拋物線或雙曲線軌道只用一次，沒有週期可言。兩體問題的兩個質點雖然各在自己的橢圓軌道上運行，週期卻都相等，這公共週期與軌道的半主軸之和 $a_{i\odot}$ 遵守以下的公式：

$$T_i^2 = \frac{4\pi^2}{G(m_i + m_{\odot})} a_{i\odot}^3 = T_{\odot}^2$$

第三定律說：兩顆繞日行星 (P_i, P_j) 軌道週期的平方與軌道半主軸的立方成正比。牛頓力學卻加以修正：

$$\text{開普勒第三定律：} \quad (T_i / T_j)^2 = (a_{i\odot} / a_{j\odot})^3$$

$$\text{牛頓的修正版本：} \quad \frac{1 + m_i / m_\odot}{1 + m_j / m_\odot} (T_i / T_j)^2 = (a_{i\odot} / a_{j\odot})^3$$

可能是因為十七世紀天文學家不明瞭橢圓的幾何，致使開普勒第一、二定律於當時並沒有得到普遍接受；¹⁰然而第三定律指出前人所未知的跨軌道關係，而且容易計算，因此大受歡迎。其實在開普勒的三條定律中，這是誤差最明顯的一條。

(五) 雙星系統

開普勒的行星軌道非常接近牛頓兩體問題的行星軌道。原因是開普勒理論相當於 $\rho \rightarrow 0$ ，實際質量比例在太陽系 $\rho \leq 0.001$ ；因此計算出來的軌道差距通常不到0.1%。我們現在知道：開普勒的三條定律只是牛頓的理論特例（太陽系的行星）的近似模型。

當然，開普勒在生時，萬有引力的概念仍未成熟，他死時胡克和牛頓還尚未出生。他的理論啟發了胡克和牛頓，我們又怎能怪他不用質量的概念呢？但反過來說，他的理論不但有欠今天輕易達到的精密程度，而且不能處理所有兩體問題。「後浪推前浪」，我們固然尊敬他劃時代的貢獻，但也無須盲從已過時、不完全、難以推廣的開普勒理論。

¹⁰ 甚至偉大的實驗物理學家伽利略 (Galileo Galilei, 1564–1642) 也沒有接受橢圓軌道。他為了支持哥白尼 (Nicolaus Copernicus, 1473–1543) 臃腫欠準的圓形軌道日心論，竟然得到「軟禁終身」的悲運。

可惜現在有些中、小學教科書依然採用開普勒的觀點，而忽略他理論的不足之處。這些書雖然揚棄了地球中心論，但換上了太陽中心論，往往更沒有指出太陽也在運動。實際上「中心」一詞並不表示「不動」，未必指涉任何實質的「物理點」，而且根本沒有意義！

牛頓兩體問題大大擴充了理論的領域，不再局限於太陽系的行星。事實上 $\rho \sim 1$ 的情況出現在「雙星系統」，兩質量相埒的質點各依大小差不多的橢圓軌道運行，質量中心在兩顆星球之間的空間；而我們不能以開普勒理論去探討此問題。

在太陽系裏其中一個類似雙星系統的例子是冥王星（Pluto）和它的伴星卡戎（Charon）。它們的質量比是 $\rho = 0.116$ ，兩者的質量中心既不在冥王星，也不在卡戎之內。這已是一個如假包換的雙（矮）行星系統了。¹¹在恆星領域，雙星系統更非常普遍。當雙星十分接近，兩者距離只有星光球大小的幾十倍甚至幾倍，它們彼此之間的引力就可以將物質從一顆星球吸引到另一顆星球上。在這種情形下，星球顯然不宜作為質點看待。

三、水星軌道的「近日點進動」（advance of the perihelion）

水星的軌道顯出經典力學無法圓滿解釋的「近日點進動」。原來水星不但繞日旋轉，水星的整條軌道也在軌道平面上繞日旋轉。¹²這問題超越了「兩體問題」的局限，牽涉到眾行星的吸引、太陽的形狀；然而以經典力學計算旋轉速度的結果，與實際觀測比較，仍然有每世紀43弧秒的誤差。

11 質量中心離冥王星中心2,270公里，約兩倍於冥王星的半徑（1,195公里）。順便一提：地球和月球之間 $\rho = 0.0123$ ，質量中心仍在地球之內。

12 嚴格來說，繞日旋轉的已經是略為變形的軌道。

根據愛因斯坦的廣義相對論（“Kepler”, 2008），太陽的重力扭曲了鄰近的空間，引起了行星位能 V 額外的一項：

$$V = V_{\text{經典}} + \Delta V; \Delta V = -\frac{Gm_{\odot}L_{i\odot}^2}{c^2m_{i\odot}r_{i\odot}^3}$$

其中 $L_{i\odot}$ 和 $r_{i\odot}$ 分別是行星的角動量和與太陽的距離。¹³ 這「反立方」項在行星中最近太陽的水星特別顯得重要。

水星軌道近日點每世紀顯出 5,599.7 弧秒的進動（precession）；¹⁴ 經典力學算出的進動是 5,557.72 弧秒，與觀察間的誤差是 41.98 ± 0.04 弧秒 = 0.75%。空間扭曲引起的進動是 42.98 弧秒，這約等於經典力學所算不出的誤差。 $5,557.72 + 42.98 = 5,600.60$ 弧秒。這「近日點進動」為廣義相對論提出了寶貴的實證。

其實廣義相對論在其他行星也引起「近日點進動」的輕微修改：

每世紀：金星，8.6 弧秒；地球，3.8 弧秒；火星，1.3 弧秒。

四、多體問題的「攝動」處理

太陽系問題牽涉到太陽、八大行星，更有矮行星、彗星和數以萬計的小行星，顯然不限於兩個質點。太陽系之外還有數之不盡的星系、天體和微塵。幸好萬有引力在遠距離和／或低質量的環境都相當微弱，多體問題因此往往可以看做一個受到干擾的「兩體問題」。直到十九世紀中葉，科學家發展了理論來計算這「干擾」的性質和程

¹³ 質量遠大於水星的太陽當靜止不動。

¹⁴ 這數據是由地球上的觀察而得到的。

度。嚴格來說，受到干擾的軌道已經不是重複不變的軌道了。不但如此，這「干擾」未必微弱，竟然可以打破古典「兩體問題」的桎梏，進而正面挑戰「軌道」的定義！

我們通常從兩體問題開始著手，然後利用「攝動理論」(perturbation theory) 或其他逐步趨近的方法處理這些「干擾」，將「難」的問題變成「煩而系統化」、按部就班的修正。

假如我們要找某事物的數值 Q ，我們或可以先求最近似的初步答案 Q_0 (例如： Q 是「多體問題」， Q_0 可能是產生橢圓軌道的「兩體問題」)，然後將 $(Q-Q_0)$ 展開成為級數，逐項演算；這就是說：

$$Q = Q_0 + Q_1 + Q_2 + Q_3 + \dots \quad (1)$$

一個常用，但並非唯一的方式，是將 Q 展開成某個「小於1的數(ε)」的冪級數(“Perturbation”, 2008)：

$$Q_k = q_k \varepsilon^k, k = 0, 1, 2, \dots; q_0 \equiv Q_0 \quad (2)$$

我們或可以選擇 $\varepsilon = m_{\text{木星}}/m_{\odot} \approx 0.001$ ，或 $\varepsilon \equiv$ 某個橢圓軌道的離心率 <1 。

本文不擬討論攝動理論的細節，但有些陷阱卻值得一提：

- a. Q 的展開未必「收斂」(converge)：¹⁵方程式(1)右方的逐項計算，未必能漸近左方。例如： q_k 未必隨著 k 的增大而變小，甚至有可能趨向無窮！

15 讓人計算出唯一而有限(unique and finite)的答案。

- b. 收斂失靈的一個可能原因是混沌現象。漸近計算通常假設從某一初值時間 (t_0) 開始；但計算出來的數字答案對時距 ($t-t_0$) 可能極端敏感。混沌現象是下文「混沌現象、蝴蝶效應與共振」一節的主題。

太陽系行星軌道所引起的多體問題也可以從每顆行星的「兩體問題」開始探討，例如地球的軌道受其他行星影響，我們可以將其他行星的影響逐一介入。改變了的地球軌道也影響了其他行星的軌道，改變了的其他行星的軌道又影響改變過的地球軌道，如此類推。這「逐步修改軌道」的攝動運算方法跟上文的級數攝動運算作比較，雖然在形式上很不同，但也有相類的缺點：運算未必收斂，計算出來的答案對時距也可能極端敏感。

所有按部就班、系統修訂的攝動方法，在許多場合成績斐然；但是否必然能夠達到需要的準確度？這卻是重大疑問。例如說來簡單的經典三體問題，已經使十九世紀末的學者費盡心血。

(一) 研究經典多體問題的雙巨星

法國數學家拉普拉斯 (Pierre-Simon, Marquis de Laplace) 和拉格朗日 (Joseph-Louis, Comte de Lagrange) 都活在拿破崙時代，¹⁶ 他們在天文學的系統攝動計算方法上都有卓絕的貢獻，可說是「一時瑜亮」，更都備受榮寵。拉普拉斯寫了長達五卷的巨作《天體力學》，並獻了一套給皇帝拿破崙。¹⁷

16 拉普拉斯 (1749–1827)，法國數學家；拉格朗日 (1736–1813)，義大利出生的法國數學家。

17 法文原文見 http://en.wikiquote.org/wiki/Pierre-Simon_Laplace。《天體力學 (Mécanique Céleste)》全書共五卷；他所送的相信只是1799年出版的第1卷和第2卷。第5卷要到1825年方才出版，那時拿破崙已去世四年了。

拿破崙問：「這本大書既然寫出整個宇宙萬物的法則，為甚麼竟然完全不提造物主呢？」

拉普拉斯答道：「陛下，我不需要這個假設。」

後來拉格朗日告訴拿破崙：「但這是多麼美妙的假設呀！它解釋了所有事物！」

拉普拉斯聽到後又說：「陛下，明智的拉格朗日先生恰好指出了這假設的癥結——它解釋了萬物，但完全不作任何預測。」

最後一句明褒暗貶，表面上贊揚「明智的拉格朗日」，實際也在揶揄罵他欠缺科學求真的態度。其實拉格朗日當時的話看來只是想討好拿破崙而已；我們將會在「特洛伊群小行星」一節中，看到他求真的一面。

拉普拉斯個人對科學預測的能力卻深信不疑。他寫道：

我們可以將今天的宇宙作為過去的果，和將來的因。假如一位睿智能夠知曉所有策動大自然的力量，和大自然中所有物件的所有位置，又假如這位睿智更能分析這些資料，它便可以將宇宙中的運動都放進一單條公式，巨細無遺；這睿智便會無所不知，將來和過去都會呈現在它的慧眼之前。

他的看法現在叫做硬性決定論（hard determinism）。現在我們知道，拉普拉斯委實太過樂觀；即使在一些經典力學的簡單領域（例如三體問題）裏，我們仍未必能做長遠的預測，而對所取得的「答案」抱有any信心。

(二) 攝動理論的勝利？

新行星的發現宣揚了經典力學攝動理論的成就。1781年，赫歇耳（F. W. Herschel）發現了天王星（Uranus），¹⁸但計算出來的運動與觀察略有差距。英國的亞當斯（J. C. Adams）和法國的勒威耶（Urbain Jean Joseph Le Verrier）都認為一顆未被發現的行星吸引了天王星；¹⁹他們各自用複雜的攝動計算，估計新行星的所在，並央請觀測天文學家代為尋找。亞當斯率先於1845年完成了計算，但替勒威耶作觀測的朋友熱心能幹，竟然在1846年捷足先登。²⁰亞當斯與勒威耶兩人後來成為摯友，而且都被後人公認為海王星（Neptune）的共同發現人。然而海王星算出來的行動看來與觀察也有出入，引起了二十世紀初期尋找新行星的狂熱，湯博（C. W. Tombaugh）亦因而在1930年發現了冥王星。²¹

現在的看法是，冥王星質量其實太小，根本沒有能力作出想像中的影響；²²國際天文學聯會（International Astronomical Union）在2006年將它降格為矮行星，不為無因。而且，過去的海王星軌道計算略有錯誤，重新算出的行程與觀察其實基本相符。

關於海王星本身的預測後來也出現了掃興的下文，原來亞當斯和勒威耶都以為新行星軌道半徑是天王星軌道半徑的兩倍；²³但實際上它只是1.57倍，所以他們算出的海王星軌道並不正確。幸虧在發現海

18 赫歇耳（1738-1822），德國出生的英國天文學家。

19 亞當斯（1819-1892）；勒威耶（1811-1877）。

20 熱心代勒威耶找尋新行星的是德國柏林天文台的加勒（Johann Gottfried Galle，1812-1910）。

21 湯博（1906-1997），美國天文學家，發現冥王星時22歲，仍未進大學。

22 冥王星被降格，與穀神星（Ceres）和伊里斯（Eris）並列為「矮行星」。詳情可參考陳天機、王永雄、彭金滿（2008）。〈名雖正而言未順：太陽系行星的新定義〉。《大學通識報》，第4期，頁197-221。

23 他們依據的是猜出來的「提斯—波德定律」（Titus-Bode Law）： $a_{\text{新行星}}/a_{\text{天王星}} = 38.8 / 19.6 = 1.97$ 。詳情可參考陳天機、王永雄、彭金滿（2008）。〈名雖正而言未順：太陽系行星的新定義〉。《大學通識報》，第4期，頁197-221。

王星的那幾年，海王星在天空出現的部位與他們的預測相差不到1弧度。然而在海王星被發現以後，似乎科學家也從沒有質疑它就是造成觀察數據與計算結果差距的元兇。近代數值模擬技術的發展加深了我們對這問題的認識。海王星對天王星軌道造成的擾動，不但解釋了觀察與計算兩者的差別，兩者差距更可以達10倍以上（Lai, Lam, & Young, 1990）。²⁴

五、混沌現象、蝴蝶效應（the butterfly effect）與共振（resonance）

混沌現象是在決定性的規律（例如牛頓力學公式）下產生，不可（長期）預測的現象。混沌的標誌是答案對時距的極端敏感：開始觀測時是微細的差距，經歷一段時間後會引起龐大的分歧。

混沌現象幾乎無孔不入。近半個世紀多位學者不懈探討，發現不少新的重要概念，解決、闡釋了許多過去的疑案；混沌現象終於獲得應得的重視，引起了科學界思想的革命，積聚了浩如煙海的文獻。²⁵ 本文只能管窺一個與太陽系有關的小角落，尤其是行星互相吸引時所產生的混沌現象。當然，對我們來說，這是一個非常重要的小角落：它關係到地球的將來，和地球上人類的興亡。

24 1690至1840年間海王星運動的觀察數據與計算結果的差距一般約50–100弧秒，海王星的擾動貢獻不但解釋了這些差距，更可以造成1,000弧秒以上的差別。詳情可參考Lai, H. M., Lam, C. C., & Young, K. (1990). Perturbation of Uranus by Neptune: A modern perspective. *American Journal of Physics*, 58 (10), 946–953.

25 過去科學研究，大致上注重「部分」，而相對地忽略「整體」；但混沌現象的「整體」性質不能夠輕易地當作略加修改的「部分之和」。概念上，我們現在了解「化約論」（reductionism）並非萬能；我們需要承認「統攝論」（holism）應有的地位。在「蝴蝶效應和有效數字」一節中更指出，長期預測既非可能，拉普拉斯的「硬性決定論」便不能成立了。

(一) 蝴蝶效應和有效數字

最先正面討論混沌現象的是於2008年去世的混沌學先驅，美國氣象學家羅倫斯（E. Lorenz）。²⁶他在1963年用「蝴蝶效應」這引人入勝的名詞來形容混沌現象：南美洲一隻與世無爭的採花蝴蝶翩翩展翅，輕拂大氣，結果可能會引起許多天之後，幾千公里外的北美洲發生狂風暴雨。蝴蝶效應往往在「非線性」環境出現，詳情超出本文範圍，我們在這裏只能提出一些概念（Davies, 1995; “Nonlinear”, 2008）。

簡單來說，在「非線性現象」裏，「因」的改變與「果」的應變不成比例：以因、果作為 X - Y 座標繪出的圖形不是一條直線。顯然，絕大多數現象都是「非線性」的；但「線性」問題容易用數學處理，許多非線性問題也可以用攝動理論，作為線性問題的輕微修改。這些以線性問題為出發點的工作可說是過去三百年科學計算的主流。但許多現象是「根本地」非線性的，不能作為輕微改變的線性現象來處理，而且這些現象的涵蓋範圍極為廣闊，不但包括羅倫斯所專長的氣象學，也包括本文所討論的經典力學的多體問題。幸好我們現在可以用超速精確的電子計算機處理大量個案，但基本非線性現象的詮釋仍要依賴科學家的洞察能力。

我們且討論混沌現象的特徵。假如在相空間（phase space）中兩點的距離當初是 $\Delta(t_0)$ ，²⁷而後來是 $\Delta(t)$ ，

$$|\Delta(t)| \sim |\Delta(t_0)| \exp \lambda (t - t_0); \quad \lambda > 0 \quad (1)$$

λ 叫做「李雅普諾夫指數」（Lyapunov exponent）。²⁸ $\lambda > 0$ 正是混

26 羅倫斯（1917–2008）。

27 相空間是表示 $\{x, y, z, v_x, v_y, v_z\}$ 的6維空間。

28 我們採用 $\exp f(t)$ 代表 $e^{f(t)}$ ，因為 $f(t)$ 帶有的上標、下標不易用後者表示。李雅普諾夫（Alexandr Mikhailovich Lyapunov, 1857–1918），俄國數學家。

沌現象的標誌， $\Delta(t)$ 以指數形式躍增。我們也可以用 $\Delta(t_0)$ 來代表量度引起的誤差；開始時這誤差可能相當輕微，但在時間 $t \gg t_0 + 1/\lambda$ 便會變大到不可收拾的地步。此後的混沌計算便完全沒有意義，不做也罷了。

李雅普諾夫指數在概念上闡明了混沌現象，但實際上用途有限；學者往往在完成了混沌現象的計算後，才有足夠訊息找出指數的真相。

我們上面的討論足以指出混沌的一個重要含義。經典力學裏的方程式是一絲不苟、「決定性的」；雖然它所描述的未必是我們的宇宙，但我們解答後，理論上可以得到明確、不含糊、用數字表示的答案。但由於準確度的喪失，我們仍然不能預測長遠的將來。上節拉普拉斯「萬事可以預測」的豪語，即使只限於三百年前早已成型的「決定性的」經典力學，恐怕也是無法兌現了！

（二）軌道間的「共振」現象

原來牛頓早就懷疑「多體問題」本身沒有簡明的全面解答，他認為可能需要神的介入（Lissauer, 1999）。就「三體問題」而言，十九世紀天文學家和數學家只能解出一些特例；他們也猜出軌道間會產生神秘的「共振」。我們在以下部分會用「共振」來介紹太陽系星體的混沌現象（Dutch, 1997; Murray, 1996; “Orbital”, 2008）。

兩顆行星 $\{P_i(t), P_j(t)\}$ 以（接近）橢圓的軌道繞日旋轉時，假如運動週期之比是 $T_i : T_j = m : n$ ，而 m, n 都是正整數，且不含公因數，則 $nT_i = mT_j$ ，而且在時間

$$t = t_0 + knT_i = t_0 + kmT_j, \text{ 當中 } k \text{ 是任何正整數。}$$

行星 P_i 剛好轉了 kn 次，行星 P_j 剛好轉了 km 次， $\{P_i(t), P_j(t)\}$ 間的相對狀態與 $\{P_i(t_0), P_j(t_0)\}$ （大致）一樣；行星 $\{P_i, P_j\}$ 的距離（大致）與時距 $kmT_j = knT_i$ 之前相同，行星間互相的吸力也（大致）一樣。這種週期

性的共振吸引便重複強化，強化的結果視乎兩行星共振時的相對位置而定：

1. 或有可能協助兩者維持現狀；
2. 更常出現的是，共振性的吸引基本改變兩者（或兩者之一）的現狀，產生蝴蝶效應，破壞共振，將簡單軌道改變成複雜、永不重複的混沌軌道。行星質量愈小，軌道的改變愈見顯著。

想不到整數理論居然會在牛頓經典力學裏發揮它的魅力！

混沌軌道永不重複，嚴格來說不能算是「軌道」，但我們沒有更適當的名詞來形容，而且在共振作用下的混沌軌道往往仍像一個正常的橢圓軌道。通常混沌軌道的特點是：半主軸 a_i 、軌道與黃道間的傾角和離心率 e 都有週期性的起伏；前兩者改變不大，但離心率可能改變四倍。離心率大時，軌道變窄，因為太陽仍在新軌道的焦點附近，因此近日點距離太陽更近，遠日點距離太陽更遠。

質量大的行星對附近天體軌道有深遠的影響。八大行星之中質量最大的四顆是木星（ $317.8M_{\oplus}$ ）、土星（ $95M_{\oplus}$ ）、天王星（ $14.6M_{\oplus}$ ）和海王星（ $17.2M_{\oplus}$ ）。

（三）小行星的「不軌」行為

夾在火星軌道（週期1.88年）和木星軌道（週期11.86年）之間有一條小行星帶（asteroid belt），在帶上的小行星數量以百萬計。²⁹在1886年，已知的小行星只有100顆左右，美國天文學家克爾克胡德

29 到2008年初，天文學家已登記了不止40萬顆位在帶上的小行星；直徑至少1公里的估計共有1-2百萬顆（“Asteroid”，2008）。

(D. Kirkwood) 在當時發現小行星帶擁有好幾道顯著的缺隙，並且指出它們可能是由軌道與木星軌道共振所產生的結果。³⁰著名的9道缺隙都名為「克爾克胡德缺隙」，在缺隙裏幾乎沒有小行星。主要的四道缺隙如表5-1及圖5-1。

表5-1 克爾克胡德缺隙與木星繞日週期（11.86年）的共振

離日距離	繞日週期	木星：小行星週期比例	其他
2.5 AU	3.95年	3:1	<u>Alinda</u> 小行星族所在 ³¹
2.82 AU	4.74年	5:2	
2.95 AU	5.07年	7:3	
3.27 AU	5.91年	2:1	<u>Griqua</u> 小行星族所在 ³²

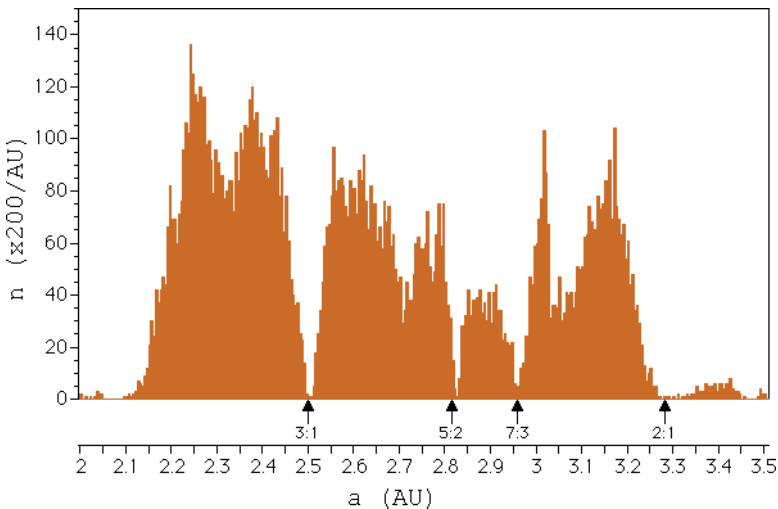


圖5-1 小行星數目分佈的缺隙

30 克爾克胡德（1814-1895）。這些缺隙現在稱為克爾克胡德缺隙（Kirkwood gap）。

31 Alinda小行星族，離心率0.4-0.65。

32 Griqua小行星族，離心率> 0.35。

木星質量龐大，與小行星產生共振時，自己幾乎毫不受影響，但可能將小行星推向「不軌」邊緣，行走絕不重複的混沌軌道；這軌道的離心率和半主軸仍然擁有週期性的起伏，從近正圓形（離心率近於0.07）變成為狹窄的橢圓，又回到近正圓形；當離心率變到大於0.3時，小行星侵犯火星軌道，火星便有機會把低質量的小行星「拉」走，在小行星帶留下缺隙。³³ 火星的兩顆衛星相信是捕捉到的小行星，但絕大多數被「拉走」的小行星在太陽系裏飄蕩，甚至侵犯地球，或最終脫離太陽系。

魏斯登 (J. Wisdom) 開拓了新方向；緊隨的研究發現在3:1共振下缺隙（大致也適用於其他缺隙）的產生過程牽涉到多個因素和階段，值得一提在整個過程中，其他行星的引力，特別是對超重的木星和土星的進動，都有關鍵性的影響。³⁴

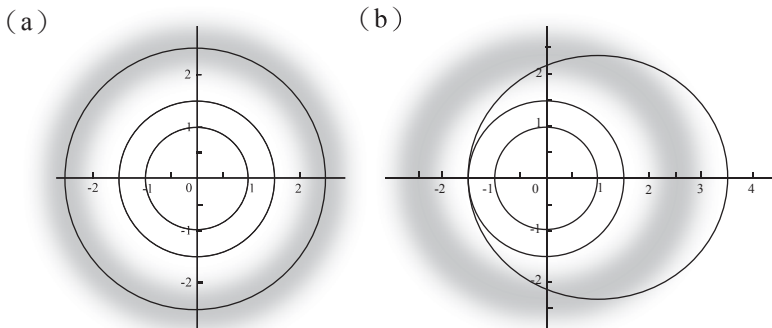


圖5-2 小行星在共振下，混沌軌道變窄，侵犯火星的軌道，因此可能會被火星吸引，遠走他方。座標原點代表太陽；最內的兩個圈分別代表地球及火星的軌道；模糊範圍大致上代表小行星帶。

圖 (a) 及 (b) 代表一個半主軸為2.5 AU，
離心率分別為0及0.4的小行星軌道。

33 美國天文學家魏斯登最先用電算機計算出小行星軌道變窄後流失的主要原因是火星的吸引。

34 天體與木星的進動速度相同的稱為 v_5 「長期共振」(secular resonance)；與土星的進動速度相同的稱為 v_6 「長期共振」(“Secular”, 2008)。

在兩道克爾克胡德缺隙（2.5 AU和3.27 AU）裏仍然有小行星族，這些小行星都有相當狹長的橢圓軌道（ $e = 0.4-0.65$; $e > 0.35$ ），相信它們遲早會被火星拉走。2.5 AU缺隙地帶更與地球成4:1共振；在那裏的Alinda小行星族絕難逃避混沌的宿命。

土星（Saturn）的卡西尼環縫（Cassini Division），與土衛一（Mimas）和土衛三（Tethys）分別存在1:2和1:4共振，相信本來存在環縫內的碎片也因此行走混沌軌道而被驅逐。土星光環有好幾百個缺隙，據說也是由於組成光環的碎片與多顆土星衛星的共振，和改變軌道後碎片互相的碰撞所致。冥王星受到海王星影響（ $T_{\text{冥王星}}:T_{\text{海王星}} = 3:2$ ），所走的也是混沌軌道（Lissauer & Murray, 2006）。

六、特洛伊群小行星（Trojan asteroids）

十八世紀末期，拉格朗日成功地解答了一些三體問題的特例。為敘述方便起見，我們討論的重點是繞日行星所引出的穩態現象。

圓形繞日（ S ）行星（ P ）軌道引出五個與行星（ P ）並行不悖的特別幾何點，叫做「拉格朗日點」（Lagrange points）。它們和鄰近的領域均可接受物質，這些物質可以與 P 一起運行，不致輕易受到排斥。其中三點（ L_1, L_2, L_3 ）在 SP 線上，³⁵不太穩定，點上的物質在非圓形軌道上容易流失。但剩下的兩點（ L_4, L_5 ）和附近的狹長領域卻非常穩定。假如我們在軌道平面上作直線線段 SQ, SR ，與軌道相交於 Q, R ，而且 $\angle PSQ = \angle RSP = 60^\circ$ ，則（ Q, R ）就是（ L_4, L_5 ）。（見圖6-1）

35 L_2, P, L_1, S, L_3 五點共線； SL_1, L_3S 略短於 SP ， SL_2 略長於 SP 。

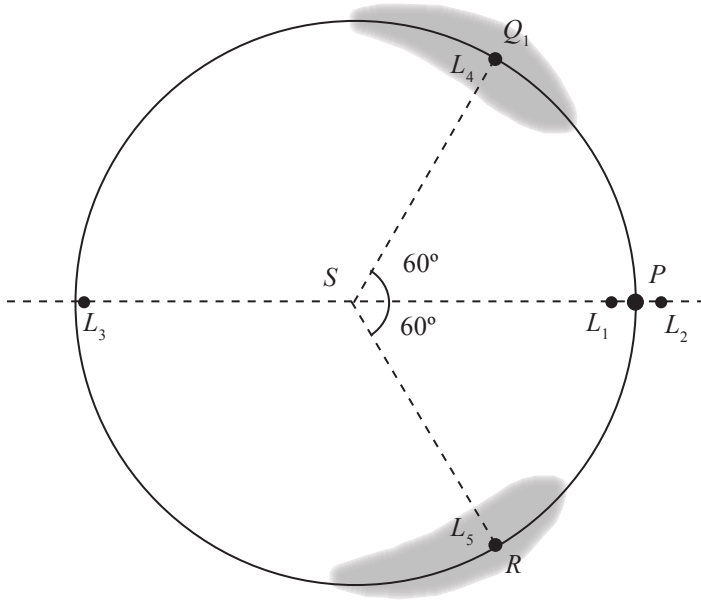


圖6-1 木星的重力鎖置了估計約有10,000顆
「特洛伊群小行星」在 (L_4, L_5) 兩點附近

拉格朗日點的最佳例證是在木星的軌道上。天文學家在它的 (L_4, L_5) 兩點附近已經找到二千多顆小天體，有名字的都以盲詩人荷馬（Homer）史詩中的特洛伊戰爭英雄為名，合稱「特洛伊群小行星」。³⁶火星和海王星的 (L_4, L_5) 附近也有小天體，它們往往也叫做「特洛伊群小行星」。理論上所有行星軌道上都應該有同樣的小天體，但它們還未被發現。拉格朗日點也不限於繞日的行星；土星的兩顆衛星和地球的衛星——月亮都有小天體在軌道上的 (L_4, L_5) 兩點附近。

36 特洛伊群小行星中有名字的其實只佔少數；許多只有編號，許多還未曾編號。在有名字的特洛伊群小行星之中，走在木星之前的 L_4 以攻方的希臘英雄為名，只有一個例外； L_5 走在木星之後，以守方的特洛伊英雄為名，也只有一個例外。

七、衝撞與絕滅

（一）恐龍的絕滅

六千五百萬年前，發生了有名的K-T絕滅；³⁷這悲劇消滅了稱雄世界的恐龍，和全球50-80%生態的物種。

美國阿爾瓦雷茨（Alvarez）父子發現了遍佈全球，³⁸富含金屬元素銥（iridium）的薄層；這薄層的地質年紀恰好相當於K-T災禍發生的時候。他們認為銥是地球上稀有的金屬，它在岩層上普遍散播的原因是來自氣化的太空星體；顯然可見，一顆隕星衝擊地球，被高熱氣化，為地球塗上了一層金屬銥。

1990年，在墨西哥尤卡坦（Yucatan）半島之北〔在赤火路拔（Chicxulub）鎮附近〕，³⁹科學家發現一個跨越海陸交界的史前大陷坑，直徑達180公里，測試顯出陷坑是在六千五百萬年前形成的。現在大多數科學家都接受阿爾瓦雷茨父子的理論了。估計當時一顆直徑10公里的小行星衝撞地球，威力相當於1百萬億噸TNT〔60億倍於1945年在廣島爆炸的原子彈（15,000噸TNT）〕。墨西哥灣出現高達幾百英尺的海嘯，全球出現滔天大火，許多沒有立即被燒死的大動物也活活餓死。濃煙覆蓋下，地球更忍受了好幾年的冰冷，繼以幾百年的炎熱（“Alvarez”，2008）；恐龍變成歷史名詞，它們只留下了近親——鳥類。

拜這小行星所賜，在恐龍時代只能苟延殘喘的哺乳類動物才得以抬頭，人類才能夠稱雄世界。這事實是否證明我們是「天之驕子」呢？許多科學家只承認：我們是幸運的一群。

37 白堊紀—第三紀絕滅（Cretaceous-Tertiary Extinction）。

38 L. W. Alvarez（1911-1988）粒子物理學家，曾獲1968諾貝爾物理獎；兒子 W. Alvarez（1940-現在）是地質學家。

39 這名字來自瑪雅民族，意思是「魔鬼的尾巴」（tail of the devil）。

（二）最嚴峻的大絕滅

2.51億年前，地球生物遭遇到最驚人的大絕滅（P-T絕滅）。⁴⁰ 96%的海洋生物物種和70%的陸地生物物種從此永遠消失了。

2006年5月地質學家范佛瑞斯（Ralph R. B. von Frese）與美國太空總署聯合公佈，⁴¹ 在南極洲東部約1.6公里厚的冰原下面，發現了一個直徑480公里大陷坑的遺跡；范佛瑞斯相信這是直徑約50公里小行星撞擊的結果。撞擊引起了大絕滅，更震裂了當時的岡瓦納大陸（Gondwana）巨型板塊；後者碎片的漂移形成今天的南美洲、非洲、印度、澳大利亞和南極洲。這理論究竟是否正確，尚待進一步的探討。

八、太陽系行星軌道的過去與未來（“Formation”，2008）

混沌現象非常複雜，難用分析推理的邏輯方法來研究。幸好近年超速電算機已相當普遍，可以在有限的時間裏處理多項算式，模擬太陽系行星動態的演化，直到長遠的未來。這些模擬所供應的，嚴格來說只是一大堆數據，不易加以洞察性的詮釋。

既然軌道共振引起的混沌現象在小行星帶和土星光環製造了空隙，它會不會製造了太陽系眾行星間的空隙呢？換句話說，利用軌道共振，我們有沒有可能從太古時代的旋轉雲霧開始，推論出現在擁有八大行星的太陽系，因而逼近、推論出、甚至超越提史斯－波德猜出來的定律呢？⁴² 此則有待將來研究發現。至少有些數值模擬結果

40 二疊紀—三疊紀絕滅（Permian-Triassic Extinction）。

41 根據美國奧海奧州立大學地質學教授范佛瑞斯與美國太空總署在2006年5月美國地質聯盟2006聯席會議（The American Geophysical Union's 2006 Joint Assembly）的公佈。

42 「提史斯－波德定律」是以此發現者——德國天文學家提史斯（Johann Daniel Titius, 1729–1796）和抄襲者——德國柏林天文台長波德（Johann Elert Bode, 1747–1826）的名字命名，詳情可參考陳天機、王永雄、彭金滿（2008）。〈名雖正而言未順：太陽系行星的新定義〉。《大學通識報》，第4期，頁197–221。

指出，在木星以外的細小天體，除了海王星以外或某顆類木行星的（ L_4, L_5 ）拉格朗日點的小行星，幾乎所有軌道都不穩定。集中在海王星以外，如冥王星的柯伊伯帶星體（Kuiper Belt Objects，簡稱KBO），似乎也是混沌現象的結果（Lecar, Franklin, Holman, & Murray, 2001）。

數值模擬顯示，在太陽系行星形成的初期，混沌現象的確改變了部份微小物質的軌道，增加了互相碰撞而演化成行星的機會（Lissauer, 1999）；學者並應用混沌理論和數值模型去模擬行星的數目和分佈（Laskar, 2000）。

魏斯登發展的高速演算法，效率比過去舊法高了1,000倍，已成為研究太陽系行星運動的典範（Sussman & Wisdom, 2001; Murray, 1994）。學者使用超速電算機，發現八大行星間在互動下所依循的多半是混沌軌道，但幸喜在將來幾千萬年，大多數行星都不會出現嚴重的「不軌」行為而基本地改變它們現有的運行狀態；它們更不會脫離太陽系，好像孫悟空千變萬變，都逃不出如來佛的掌心（“Formation”, 2008; Sussman & Wisdom, 1992）。

但2008年4月的一篇文章報導了兩個中心的研究（Shiga, 2008），⁴³顯示我們當真可以擔保的，只是最少在四千萬年內太陽系會大致不變。然而，此後水星軌道有1-2%的可能性變成高離心率的橢圓（ $e=0.6$ ），⁴⁴接近金星的軌道，產生混亂，因此也許會直接或間接引起火星衝撞地球。

無論如何，在五十億年後，太陽肯定會變成紅巨星，極度膨脹的光球會大於現在的地球軌道。其實那時地球軌道也因太陽質量流失而變大，不致於被太陽光球吞噬；但在高熱之下，它表面的水分會全部

43 兩個研究中心的主要學者是美國聖克魯斯（Santa Cruz）的G. Laughlin和法國巴黎的Jacques Laskar。

44 現在是 $e = 0.206$ ，比較接近圓形（ $e = 0$ ）。

蒸發，不再適宜人類居住。我們不能坐以待斃，一定要未雨綢繆，活用昌明的科學，預先建造自己逃難的「挪亞方舟」；一隻可能的方舟卻是圓的：它就是我們的地球。

短期內直徑幾公里的小行星仍有可能衝撞地球，重演六千五百萬年前的一幕。那時的悲劇主角不會是早已絕滅的恐龍，而將會是自詡為萬物之靈的人類。

九、新的疑問

我們的銀河星系是一個擁有橫軸的多臂螺旋星系（barred multi-arm spiral galaxy），直徑約為100,000光年，除了隆起的中央部分外，平均厚度約為1,000光年；此外，更有由古老恆星和球狀星團組成及散佈，成直徑200,000光年球狀的銀暈（galactic halo）。

太陽系是銀河星系的一部分，它位在銀河星系圓盤平面，繞著26,000光年外的銀河星系中心旋轉，速度是每秒220公里（走1 AU要花8天；走1光年要費1,400年），繞一圈要費2.25–2.50億年。估計自形成之後，太陽系已繞了20–25次了（“Milky”，2008）。

德國天文學家根舍（Reinhard Genzel）研究銀河星系中心附近恆星的運動，發現它們繞著一個質量奇高的物體〔 $(2.05-2.85) \times 10^6 M_{\odot}$ 〕運行；2008年6月，他因此榮獲香港的邵逸夫天文獎。黑洞吸收它所接觸到的光，所以它本身大致上是看不見的；但黑洞旋轉時，在旋轉軸兩端發射X-光，而且根據廣義相對論，它的吸力也影響鄰近的光的軌跡和波長。這些特性供應了數據，讓我們估計黑洞的性質。當我們觀察其他星系，同時也能猜出關於銀河星系中心黑洞的知識。霍金（S. Hawking）根據量子力學的場理論，推斷黑洞也放出微弱的光。

整個銀河星系的質量等於六千億到三萬億個太陽〔 $(6-30) \times 10^{11} M_{\odot}$ 〕，但其中只有一小部分是我們認識的「可見物質」，估計看不見，但遵守萬有引力的「暗物質」(dark matter)約莫是可見物質的五倍。神秘的黑洞和暗物質都是近年星系研究的重點對象。

太陽系因此也有一個值得討論的問題：為甚麼在太陽系範圍內好像根本沒有這些神秘物體和神秘物質呢？

附錄I. 二次曲線

二次曲線可以用極座標簡括表示。下圖以橫軸為對稱軸、以原點 O 為焦點之一 (“Conic”, 2008)。⁴⁵

$$r = aq / (1 - e \cos \theta)$$

e 是離心率 (eccentricity)； a 是半主軸 (semi-major Axis)， aq 叫做半正焦弦 (semi-latus rectum) 是從原點到曲線，與 Y 軸平行的線段 HO 的長度。 q 是隨離心率 e 而變的簡單函數：

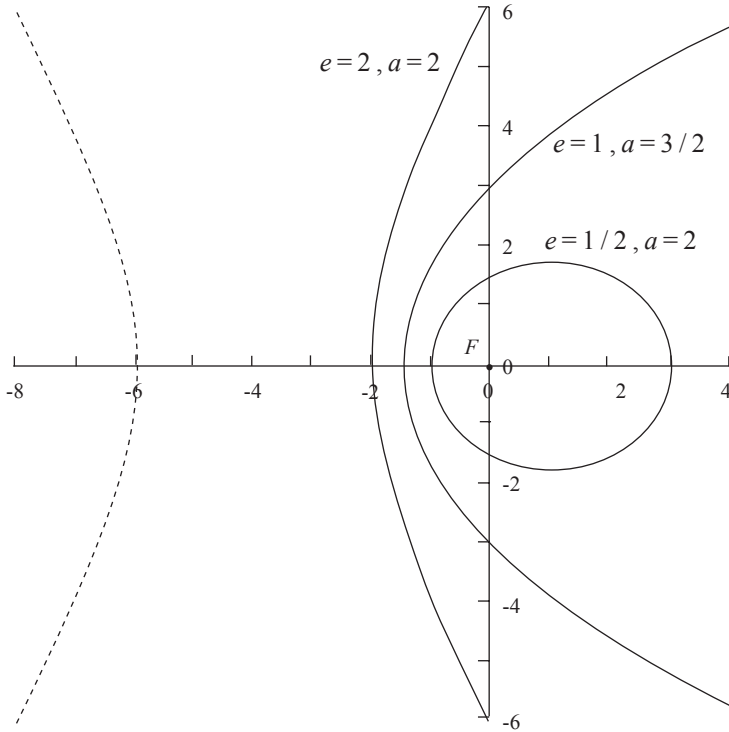
圓形的特徵是 $e=0$ ， $q=1$ ；它的圓心也是它的焦點，與原點疊合。

橢圓形的特徵是 $0 < e < 1$ ， $q=(1-e^2)$ ；它有兩個焦點，其中左邊的一個與原點疊合。

拋物線的特徵是 $e=1$ ， $q=2(=1+e^2)$ ；它只有一個焦點，與原點疊合。

45 同一條二次曲線在 $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$ 的座標變換，可以用笛卡兒座標表示，例如橢圓的極座標方程式變成 $(x-ae)^2 / a^2 + y^2 / a^2 (1 - e^2) = 1$ 。

雙曲線的特徵是 $e > 1$ ， $q = (e^2 - 1)$ ；它有兩個焦點，其中右焦點與原點疊合。



圖A1-1 二次曲線

我們可以說圓形是兩個焦點合併的橢圓；拋物線另有一個在無窮遠的焦點；雙曲線有一個從無窮遠走回來的第二焦點。

本文討論的主要對象是橢圓；它有兩條互相垂直的軸，在圖中左焦點在座標的原點。主軸長度是 $2a$ ，與 X 軸重合 (coincide)；副軸長度是 $2b$ ， $b = a(1 - e^2)^{1/2}$ 與 Y 軸平行。橢圓的 X -交點是 $(-a(1 - e), a(1 + e))$ ， Y -交點是 $(\pm a(1 - e^2) = \pm aq)$ 。

附錄II. 混沌的真相 (Dutch, 1997)

對混沌的誤解	混沌的真相
現象不受自然定律控制。	現象仍受自然定律控制，但本身太過複雜，不容簡單的描述。
現象是胡亂或無法預測的。	現象可在短期，但不能在任意的長期內預測。初時微小的誤差會演變成龐大的差異。
混沌系統並不穩定，終歸崩潰。	混沌系統或局限在某個範圍內，但行為仍然難以預測。

附錄III. 共振的種類

類別	對應的物理量	
軌道共振 (orbital resonance)	行星A的公轉軌道週期 例如：小行星週期 x 年	行星B的公轉軌道週期 例如：木星週期 $3x = 11.86$ 年
長期共振*	行星A (例如：小行星) 近日點移動週期	行星B (例如：土星) 近日點移動週期
自旋—軌道共振 (spin-orbit resonance)	自轉週期 例如：月亮自轉週期 1個月	公轉軌道週期 例如：月亮公轉週期 1個月

* 「長期共振」的數值模擬指出在許多太陽系內星體的「不軌行為」中扮演著重要的角色。與木星和土星相關的長期共振影響了小行星帶中小行星的數目分佈；與天王星和海王星相關的長期共振也可能使30 AU以外的KBO來到內行星範圍，成了短週期彗星 (Lecar, Franklin, Holman, & Murray, 2001)。

參考書目

中文參考書目

1. 陳天機、王永雄、彭金滿（2007）。〈太陽系理論的突破〉。《大學通識報》，第3期，頁133–151。
2. 陳天機、王永雄、彭金滿（2008）。〈名雖正而言未順：太陽系行星的新定義〉。《大學通識報》，第4期，頁197–221。
3. 陳天機、彭金滿、王永雄（2007）。〈地心論面臨挑戰〉。《大學通識報》，第2期，頁125–149。

外文參考書目

1. Carroll, B. W., & Ostlie, D. A. (2007). *An introduction to modern astrophysics* (PIE, 2nd ed., pp. 41–49). San Francisco: Pearson.
2. Davies, P. (1995). *The cosmic blueprint: Order and complexity at the edge of chaos* (pp. 23–27). Harmondsworth: Penguin.
3. Dutch, S. (1997). Rings and resonances. *University of Wisconsin-Green Bay*. Retrieved December 2, 2008, from <http://www.uwgb.edu/dutchs/planets/resonanc.htm>.
4. Koestler, A. (1959). *The sleepwalkers: A history of man's changing vision of the universe* (pp. 225–422). London: Hutchins.
5. Lai, H. M., Lam, C. C., & Young, K. (1990). Perturbation of Uranus by Neptune: A modern perspective. *American Journal of Physics*, 58 (10), 946–953.
6. Laskar, J. (2000). On the spacing of planetary systems. *Physical Review Letters*, 84, 3240–3243.
7. Lecar, M., Franklin, F. A., Holman, M. J., & Murray, N. W. (2001). Chaos in the solar system. *Annual Review of Astronomy and Astrophysics*, 39, 581–631.

8. Lissauer, J. J. (1999). Chaotic motion in the solar system. *Review of Modern Physics*, 71 (3), 835–845.
9. Lissauer, J. J., & Murray, C. D. (2006). Solar system dynamics: regular and chaotic motion. In L. A. McFadden, P. R. Weissman, & T. V. Johnson (Eds.), *Encyclopedia of the Solar System* (pp. 787–812). New York: Elsevier.
10. Murray, C. (1994). Is the solar system stable? In N. Hall (Ed.), *Exploring Chaos: A Guide to the New Science of Disorder* (pp. 96–107). New York: Norton.
11. Shiga, D. (2008). *Solar system could go haywire before the Sun dies*. Retrieved December 2, 2008, from <http://space.newscientist.com/article/dn13757-solar-system-could-go-haywire-before-the-sun-dies.html>.
12. Sussman, G. J., & Wisdom, J. (1992). Chaotic evolution of the solar system. *Science*, 257 (5066). Retrieved December 2, 2008, from <http://swiss.csail.mit.edu/users/wisdom/ss-chaos.pdf>.
13. Sussman, G. J., & Wisdom, J. (2001). *Structure and interpretation of classical mechanics*. Cambridge, Mass.: The MIT Press.
14. Wikipedia. (2008). *Alvarez hypothesis*. Retrieved December 15, 2008, from http://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Alvarez_hypothesis&oldid=255132858.
15. Wikipedia. (2008). *Asteroid*. Retrieved December 3, 2008, from <http://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Asteroid&oldid=254105569>.
16. Wikipedia. (2008). *Conic section*. Retrieved December 3, 2008, from http://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Conic_section&oldid=248508344.

17. Wikipedia. (2008). *Formation and evolution of the solar system*. Retrieved November 28, 2008, from http://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Formation_and_evolution_of_the_Solar_System&oldid=254384857.
18. Wikipedia. (2008). *Kepler problem in general relativity*. Retrieved November 28, 2008, from http://en.wikipedia.org/wiki/kepler_problem_in_general_relativity.
19. Wikipedia. (2008). *Milkyway*. Retrieved November 28, 2008, from http://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Milky_Way&oldid=254064569.
20. Wikipedia. (2008). *Nonlinear system*. Retrieved November 28, 2008, from http://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Nonlinear_system&oldid=251361139.
21. Wikipedia. (2008). *Orbital resonance*. Retrieved November 28, 2008, from http://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Orbital_resonance&oldid=245462090.
22. Wikipedia. (2008). *Perturbation theory*. Retrieved November 28, 2008, from http://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Perturbation_theory&oldid=245385107.
23. Wikipedia. (2008). *Pierre-Simon Laplace*. Retrieved December 3, 2008, from http://en.wikiquote.org/wiki/Pierre-Simon_Laplace.
24. Wikipedia. (2008). *Secular resonance*. Retrieved November 28, 2008, from http://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Secular_resonance&oldid=195318889.

建議閱讀書目

1. Davies, P. (2007). "Chaos frees the universe". Retrieved December 3, 2008, from <http://www.fortunecity.com/emachines/e11/86/freeuni.html>.

（這是一篇討論混沌概念，有深度的普及科學短文。）

2. Lecar, M., Franklin, F. A., Holman, M. J., & Murray, N. W. (2001). Chaos in the solar system. *Annual Review of Astronomy and Astrophysics*, 39, 581–631.

（文章交代了近年關於太陽系混沌現象的研究，惟內容頗為技術性。）

3. Lissauer, J. J., & Murray, C. D. (2006). Solar system dynamics: regular and chaotic motion. In L. A. McFadden, P. R. Weissman, & T. V. Johnson (Eds.), *Encyclopedia of the solar system* (pp. 787–812). New York: Elsevier.

（這是一篇全面介紹正規運動和混沌運動的可讀學術文章。）

4. Peterson, I. (1995). *Newton's clock: Chaos in the solar system*. New York: W. H. Freeman.

彼得遜（著），黃啟明、黃銘鏘（譯）（1997）。《牛頓時鐘：渾沌太陽系》。台北：牛頓出版股份有限公司。

（此書有太陽系裏混沌現象的生動科普的介紹。）

