Education Journal《教育學報》, *Vol. 35, No. 1, Summer 2007*

操作材料對兒童理解加減法關係和選擇計算策略的影響

成子娟
香港中文大學教育心理學系

本研究使用結構性材料指導 4.5–5.5 歲兒童有系統地學習加減法，並與使用非結構性材料的同齡兒童進行對比，藉以探討兩種操作材料對於兒童數學邏輯發展潛能的影響。結果表明，結構性材料能夠幫助兒童理解加減法關係（數量的整體與部分關係）。理解這些關係，可以促進兒童在解答加減法時採用分解／組合策略，並減少加減法混淆的錯誤。

兒童的數學邏輯

要掌握基礎的數學邏輯，須具備抽象能力和理解數量關係的能力。數學抽象能力表現在從形形色色的具體事物中抽象出數目和數字，抽象出事物的形狀（成子娟，2004；Clements & Sarama, 2005）；理解數量關係的能力表現在許多方面，例如把握數序的能力、理解數量的整體／部分關係（Clements & Sarama, 2005; Ginsburg, Kaplan, et al., 2006）的能力、理解加減法的互逆關係等。

對於學前兒童是否具有數學邏輯，有兩種說法。一說偏向於認爲兒童具有先天（nativists）的數學邏輯。比如，兒童天生具有非語言性質的計數和簡單加法的能力（Wynn, 1992a, 1998）。儘管這種非語言的感知數量的能力和語言性質的計數能力不同（Carey, 2001; Wynn, 1992b），但是這先天的能力使兒童能夠迅速學習數量詞匯的意義、實

物數數和以詞匯爲基礎的計算（Wynn, 1992a, 1998）。另一種說法則偏向於以 Piaget 爲代表的「兒童先天數無能」學說。比如，兒童最初對小集合數目的估計、計數和引用的數量詞匯都是無意義的技能，數量詞匯對於兒童來說僅僅是像學唱一首歌，它不能表示兒童理解數量。由於兒童能力所限，他們不能建構真正具意義的數概念和理解算術知識（Ginsburg, 1977）。

「先天論」和「無能說」在兒童教育實踐中，均令自然探索數學（Baroody, Tiilikainen, & Tai, 2006）和遊戲的教學傾向更加彰顯（Ginsburg, Kaplan, et al., 2006）。兩種說法均或多或少認爲，兒童能在與環境互動的自由遊戲中，不斷建構數學概念和發展數學邏輯。然而，美國官方機構 National Association for the Education of Young Children（NAEYC）和 National Council for Teachers of Mathematics（NCTM）已經認識到，自由遊戲對促進兒童數學思維發展是不足夠的，而成人的指導對兒童日常數學基礎的建構是必要的，成人應該向兒童傳達數學概念、方法和語言，並幫助兒童深入探討數學概念（Ginsburg, Kaplan, et al., 2006; NAEYC & NCTM, 2002）。

Baroody, Lai, & Mix（2006）在兒童「有能論」和「無能論」的兩種對立觀點中衍生出一種中立學說。他們認爲，兒童最初所使用的幾個數量詞可能並無意義，但他們日後會在成人引導下使用這些詞匯，並把這些詞匯與具體事物特定的數量關係建立聯繫，從中抽象出真正的數量意義。隨着兒童概念知識的增長，它才能爲新的學習提供廣闊和更有效的基礎。他們的研究表明，通過教師的鷹架模式，比如鼓勵兒童發現 *n* 之後增加 1 的組合原則（the *n*-after rule for *n* + 1 combinations）（Baroody, 1995; Baroody, Lai, et al., 2006），可以促進兒童認識較爲複雜的數學邏輯，如認識基數概念（embedded cardinal-count-concept）和採用接着數（counting-on）的策略解答加法。他們亦看到教師的鷹架模式在幫助兒童發展數學邏輯方面的重要作用。這類研究進一步證明，兒童的數學能力表現遠高於 Piaget 的說法（Ginsburg, Klein, & Starkey, 1998; Mandler, 2003），如果給予兒童指導，他們能學習更複雜的數學

（Ginsburg, Kaplan, et al., 2006; Zur & Gelman, 2004）。可見，教師／成人對兒童學習數學的指導作用似乎愈來愈受重視和肯定。

究竟成人指導對於學前兒童數學邏輯發展的空間和作用有多大，仍存爭議，而且相關研究亦鳳毛麟角（Bobis, 1996）。比如，有些學者認爲教師應該避免教授兒童用抽象的「接着數」的策略解答加法，而應允許兒童發明他們自己的策略；另有些學者則認爲插手促進這個策略的發展是教師的責任，因此探討成人的指導如何能以適合兒童發展的方式執行十分重要（Baroody, Lai, et al., 2006）。成人指導的方式實在相當廣泛而籠統，本研究則集中探討教學材料的干預對兒童理解數量的整體與部分關係（特別是加減法互逆關係）的影響，亦包括成人指導對兒童解答加法策略的影響。

兩類數學教學材料

在兒童數學學習的過程中，有兩類材料的作用相當重要：一是圍繞兒童生活的零散材料，如糖果、玩具、人群等；另一是按照某些數學知識的內在關係而製作的教具，如由數字、板條或方格組成的數學教具（成子娟，2003，2004；成子娟、賈非、馮志堅，1992）。Chao, Stigler, & Woodward（2000）概括這兩類材料爲非結構性材料（varied materials）和結構性材料（structured material）。更廣泛地說，非結構性材料就是任何一種可以表達數量的具體實物、圖片或半抽象物（如圓點），它們以任何一種形式出現，並無固定的排列結構；結構性材料則是將這些表達數量的實物、圖片或半抽象物按照數學特定的邏輯關係構造出來的教具（成子娟，2003；成子娟、賈非、馮志堅，1992；Chao et al., 2000）。

在學前數學中，非結構性材料一直都廣受重視，它是兒童與環境互動的重要資源。人們普遍認爲學前兒童不具備抽象思維能力，一提到「抽象」這詞，許多學前工作者便立即迴避，認爲這是成人的事情。他們希望爲兒童提供具體的、身邊的經驗（Clements & Sarama, 2005）。比如，以活動爲中心（activity-centered）的學習模式所包含的數學元素，

多由環境中的隨機材料和事件所組成，如點數出勤人數、分配物品、排列物品的順序等。這類教學模式在美國是主導的（Chao et al., 2000）。此外，高廣度教學（high scope approach）和方案教學（project approach）中的數學內容，亦採用了不少兒童身邊的經驗，而貫穿其中的亦是非結構性材料。Ginsburg, Kaplan, et al.（2006）指出，雖然高廣度教學能爲兒童提供結構性的活動，可惜卻很少能包含數學，亦難反映數學邏輯知識（成子娟，2004）。Chao et al.（2000）集中探討兩種不同類型材料對兒童解答計算題目的影響，結果表明，結構性材料可以刺激兒童選擇較高級的計算策略，或者加快計算時間，而非結構性材料則刺激兒童選擇手指計算策略和增加計算的準確性。

本研究以結構性和非結構性數學教學材料爲實驗的自變量，以加減法計算爲因變量，藉以探討不同操作材料對兒童理解加減法的關係及選擇計算策略的影響，進而了解兒童數學邏輯思維發展的潛能。

研究方法

被 試

對照組

大部分以香港學前被試爲對象的研究，取樣都考慮地區（港島、九龍和新界）、辦學規模（主要是收生人數，規模包括大、中、小三類）和辦學形式（包括幼稚園和兒童中心）三個因素（Opper, 1996）。本研究共選取了 11 所學校，這些學校都包括了以上三個因素。研究人員在第一年從這 11 所學校中隨機抽取 108 名平均年齡爲 4.7 歲（低班）和 117 名平均年齡爲 5.7 歲（高班）的兒童爲對照組被試，並進行測試。

實驗組

研究人員從第二年開始，參照以上提到取樣所考慮的三項因素，從 11

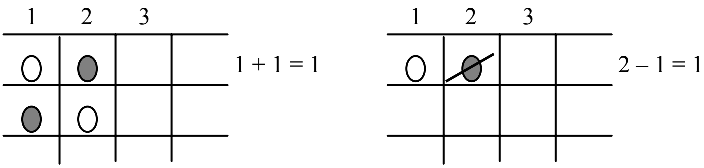
所學校中抽出 5 所作爲實驗學校。實驗學校的所有低班兒童都參與實驗教學，爲期一年。一年後，從實驗學校參加過前測的兒童中隨機抽出 90 名進行後測。實驗組兒童的前測數據會與前一年其他學校低班兒童的數據作對比，而後測數據則與該兒童就讀學校和其他 6 所學校前一年的高班同齡兒童數據進行對比。

課程

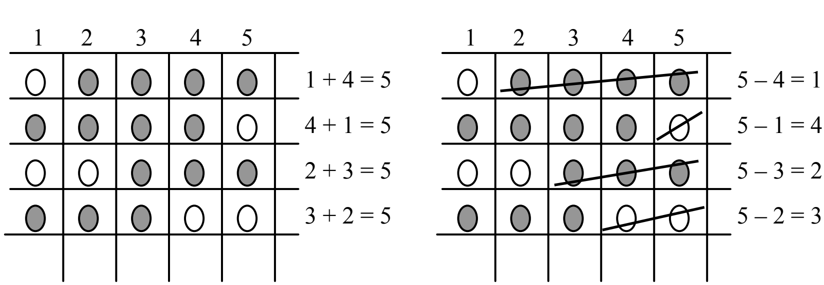
實驗組課程

實驗教學把解答加減法設計爲一系列相關的結構性材料，兒童需要通過操作這些材料，理解 10 以內加減法的關係（成子娟，2005）。這些結構性材料包括 45 個加減法關係模式，比如 2/1/1 模式（見圖一）或 5/1/4 和 5/2/3 模式（見圖二）。

圖一：2/1/1 加減法關係模式

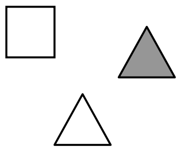


圖二：5/1/4 和 5/2/3 加減法關係模式

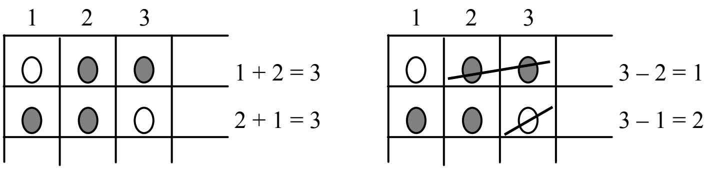


最初的一兩個模式是由教師指導兒童在分類的基礎上產生的，以後的模式則由兒童獨立發展。例如圖三，教師指導兒童按照顏色分類，有 1 個黑色的，有 2 個白色的；按照形狀分類，有 2 個三角形，有 1 個方形；把每個類別的數量，分別用兩種不同顏色的數粒，在學具上表示出來（見圖四），便建立了 3/1/2 或 3/2/1 的模式及其加法和減法的關係。

圖三：包含 3/1/2 的集合



圖四：3/1/2 加減法關係模式



在教師確認兒童已理解了這些做法之後，兒童便可以逐漸脫離教師的指導，獨立建構其他 10 以內加減法的關係模式。

對照組課程

一、加減法關係及其計算策略

加減法教學在對照組是分開進行的。兒童利用兩種形式的非結構性材料學習加減法內容，一是實物材料，另一是圖畫材料：

- 實物材料多用於主題教學或其他遊戲活動中。教師會指導兒童用數數的方法，計算出兩組實物（如用品、水果、花朵）相加的結果。
- 圖畫材料多用於教材套中的習題，即圖畫加減法。這些題目通常是得數在 10 以內的加減法。教師指導兒童做工作紙上的加減法題目，亦是用數數的方法。比如：
  - 圖加法：●●●●● ○○○ 兩堆物件加起來有多少個？教師通常指導兒童從 1 開始，數到 8。
  - 圖減法：●●●●●~~○○○~~ 減掉白色的，還剩下多少個黑色的？教師通常指導兒童從 1 開始，數到 5。

除了使用非結構性材料學習加減法外，對照組兒童還要做抽象的紙筆計算，包括一位數加減一位數、兩位數加減一位數和兩位數加減兩位數。教師指導兒童用數手指的方法進行計算。比如 5 + 3，教師會用兩種方法教導兒童：一是伸出 5 個和 3 個手指，然後從頭數；二是把 5 記在心裏，然後伸出 3 個手指，接着數 6、7、8。

二、教學時間和教師因素

實驗組課程有 9 個單元，其中包括 45 個加減法關係模式。每個單元的教學時間從 5 分鐘到 20 分鐘不等。時間的長短依賴於學習時段和兒童的個別差異。比如，當兒童最初接觸第一個加減法關係模式時，需要教師指導的時間較長，而後期所用時間則較短。此外，不需要兒童做任何家課。在實驗組兒童之中，有 95%平均所用時間不超過 240 分鐘。控制組兒童學習數學的時間，多數分配在綜合課程中和做工作紙。不計家課，僅僅計算控制組兒童用於學校的數學學習時間便遠超過 240 分鐘。

由於實驗組兒童的後測數據，部分會與同校前一年同齡兒童的數據進行對比，所以同一位教師會教授前一年的對照組兒童，亦會教授後一年的實驗組兒童。這樣，教師變量可得到一定程度的控制。

測 試

前 測

加減法意義

- 測試卡片：15 – 12、15 + 2，共一題。
- 指導語：小朋友（出示卡片），不用計算，估估 15 – 12 和 15 + 2 的得數哪個會更大？
- 計分：答對計 1 分，總分 1 分。

加減法互逆關係

- 測試材料：一個盒子裏放入 8 塊積木。
- 指導語：小朋友，請你數一數這個盒子裏有幾塊積木？請你再放入這些（拿給小朋友 2 塊積木，不用提數字），看看現在盒子裏有幾塊積木了？共一題。
- 計分：答對計 1 分，總分 1 分。
- 測試材料：接續前面，盒子裏已有 10 塊積木。
- 指導語：小朋友，請你從盒子裏拿出 2 塊積木，想想現在盒子裏會剩下幾塊積木了？共一題。
- 計分：如果兒童不需要重新計數盒子裏面的積木而給出正確答案，計 1 分，總分 1 分。

加減法計算的準確性和計算策略

- 測試卡片：5 + 2、7 – 2、4 – 2，共三題。
- 指導語：現在請你做題（出示卡片 5 + 2、7 – 2、4 – 2），要做得又對又快，我說停的時候，你就不要做了。
- 計分：答對 1 題計 1 分，總分 3 分。

- 觀察和詢問：是否用手指幫助運算？是否用點數（點頭或在心裏點數等）？詢問：小朋友，請你告訴我，你是怎樣計算這道題的？根據這些紀錄，對兒童的計算策略作出類別分析。兒童的計算策略分爲三類：用數數策略解答，以「1」表示；立即給出答案，以「2」表示；用分解組合策略解答，以「3」表示。

後 測

加減法關係及其計算策略

- 測試卡片：2 + 6、5 + 8、5 – 2、8 – 5、18 – 7，共五題。
- 指導語：現在請你做題（出示卡片 2 + 6、5 + 8、5 – 2、8 – 5、18 – 7），要做得又對又快，我說停的時候，你就不要做了。
- 計分：答對 1 題計 1 分，總分 5 分。
- 觀察和詢問：是否用手指幫助運算？是否用點數（點頭或在心裏點數等）？詢問：小朋友，請你告訴我，你是怎樣計算這道題的？根據這些記錄，對兒童的計算策略作出類別分析。兒童的計算策略分爲三類：用數數策略解答，以「1」表示；立即給出答案，以「2」表示；用分解組合的策略解答，以「3」表示。

結果分析

前 測

前測重點考察了實驗組和對照組兒童對理解數量的整體與部分關係的表現，包括兩項測驗：（1）理解加減法的意義和互逆關係；（2）計算加減法的準確性和策略。測試結果表明：除了對照組兒童理解加減法意義的成績較實驗組兒童爲佳之外，兩組兒童的其他各項成績均無顯著差異（詳見表一、表二）。

表一：前測，T 檢驗，實驗組和對照組兒童理解數量關係的成績比較

	實驗組		對照組		顯著性檢驗		
	平均數	標準差	平均數	標準差	*df* 自由度	T 值	T 檢驗
加減法意義	.472	.50	.267	.44	196	3.02	.003*
加減法互逆關係	1.06	.25	1.07	.25	196	.052	.958

* $p < .01$

表二：前測，χ^2檢驗，實驗組和對照組兒童加減法計算成績比較（人數）

	5 + 2		7 – 2		4 – 2	
	實驗組	對照組	實驗組	對照組	實驗組	對照組
0#	31	23	33	27	2	1
1#	49	63	55	77	72	84
2#	10	22	2	4	16	23
人數	90	108	90	108	90	108
χ^2	5.847		3.324		.884	

\# 0 = 答案錯誤；1 = 數數策略；2 = 立即回答

後 測

後測重點考察了實驗組和對照組兒童對理解數量的整體與部分關係的表現，包括兩項測驗：（1）計算加減法的準確性和策略；（2）理解加減法的互逆關係。

計算加減法的準確性和策略

實驗組和對照組兒童計算加減法的準確性和計算策略的成績比較，詳見表三。表三的結果表明，實驗組和對照組兒童在加法計算的錯誤答案比例上差異很小，但是對照組兒童的減法計算錯誤比例卻明顯高於實驗組兒童。

表三：後測，χ^2檢驗，實驗組和對照組兒童計算加減法的三種策略百分比比較

	2 + 6		5 + 8		5 – 2		8 – 5		18 – 7	
	實驗	對照	實驗	對照	實驗	對照	實驗	對照	實驗	對照
0#	3.3	3.4	10.0	11.1	8.9	10.3	11.1	28.2	12.2	35.0
1#	26.7	71.8	27.8	83.8	30.0	71.8	53.3	69.2	60.0	65.0
2#	31.1	22.2	3.3	3.4	47.8	17.9	13.3	2.6	2.2	0
3#	38.9	2.6	58.9	1.7	13.3	0	22.2	0	25.6	0
總計（%）	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100
人數	90	117	90	117	90	117	90	117	90	117
χ^2	57.96***		89.49***		46.91***		43.36***		43.25***	

0 = 答案錯誤；1 = 數數策略；2 = 立即回答；3 = 分解組合策略

*** $p < .001$

雖然兩組兒童計算加法準確性的差別不大，但是，對照組兒童中有 65–83.8%使用數數手指的策略，比如計算 5 + 8，有些兒童伸出 8 隻手指，從 6 開始數，數到 13；有些則伸出 5 隻手指，從 9 開始數，數到 13。而實驗組兒童運用分解組合策略解答加減法的人數比例（13.3–58.9%）遠遠超過對照組兒童（0–2.6%），比如運用這個策略解答 5 + 8 的兒童，有些會把 8 分成 5 和 3，5 和 5 相加等於 10，再加 3，等於 13；有些則會把 5 分成 2 和 3，2 和 8 相加等於 10，10 再加 3 等於 13。

表三進一步的 χ^2檢驗（Chi-Square: cross tabulation）分析表明，實驗組和對照組兒童在解答五個加減法題目中所使用的計算策略存在顯著差異（$p < .001$）。

理解加減法的關係

表四列出對實驗組和對照組兒童的錯誤答案的進一步分析結果。從表中可見，對照組兒童在減法計算方面的錯誤大多源於加減法混淆。這類錯誤在「5 – 2」題目中佔 100%，在「8 – 5」和「18 – 7」兩個題目中，分別佔 29%和 60%。錯誤通常是把這三個減法題目當作加法計算。相比之下，實驗組兒童則很少出現這類錯誤。

表四：後測，實驗組和對照組兒童加減法混淆佔全部錯誤的百分比

	2 + 6		5 + 8		5 – 2		8 – 5		18 – 7	
	實驗	對照	實驗	對照	實驗	對照	實驗	對照	實驗	對照
答案正確	97	97	90	89	91	90	89	72	88	65
答案錯誤	3	3	10	11	9	10	11	28	12	35
（屬於加減法混淆）	（0）	（0）	（0）	（0）	（0）	（10）	（1）	（8）	（0）	（21）
總計（%）	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100
人數	90	117	90	117	90	117	90	117	90	117

結果討論

本研究結果表明，不同的操作材料對於兒童理解數量關係有顯著影響。結構性材料能夠幫助兒童理解數量的整體與部分關係。理解這些關係可以促進兒童在解答加減法時採用分解組合策略，並減少加減法混淆的錯誤。

本研究不僅證實了學前兒童可以在成人指導下發展數學邏輯（Baroody, Lai, et al., 2006），而且進一步探討了教學和兒童發展潛能的關係，以及教師如何幫助兒童更深入探討數學概念（Ginsburg, Kaplan, et al., 2006; NAEYC & NCTM, 2002）的一些具體教學方法。

學前兒童的數學邏輯發展潛能受兩類操作材料影響

先前的研究（例如 Baroody, Lai, et al., 2006; Ginsburg, 1977; Ginsburg, Klein, et al., 1998; Mandler, 2003; Piaget, 1965）在探討或列舉學前兒童數學邏輯發展水平方面所出現的紛爭，其實反映了教學與兒童發展潛能的關係。

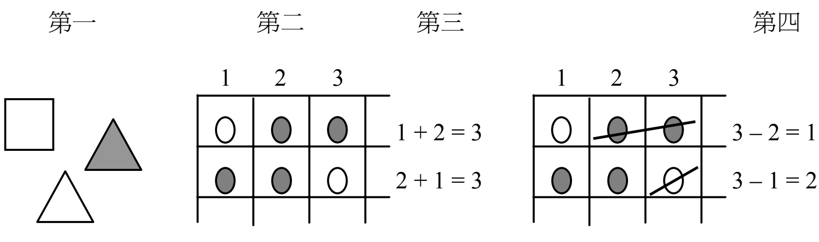
在本研究中，由於實驗組和對照組兒童所使用的學習材料不同，導致了不同的學習結果。實驗前測的成績表明，實驗組和對照組兒童的加減法計算成績和使用的計算策略並無差異，他們全部用數數實物和數手指策略解答加減法，很多兒童甚至把減法當作加法計算。這說明，他們

並不完全理解數量的整體與部分關係，更不能理解加減法的可逆關係。對比實驗之後，實驗組與對照組兒童主要在兩個方面有差異。第一是加減法的計算策略。許多實驗組兒童可以擺脫數數實物和數手指的策略，而對照組兒童的計算策略沒有絲毫改變。第二是加法和減法成績的差距。通常，兒童的加法成績要好於減法成績，本實驗中兩組兒童前測的成績亦是這樣。但實驗組兒童的後測結果表明，他們的加法和減法成績幾乎接近，而控制組兒童的加減法成績仍然保持前測時的差距。可見，實驗組兒童使用結構性材料，使他們表現出理解數量關係方面的優越性，而對照組兒童使用非結構性材料，使他們在理解數量關係方面相對落後。

本實驗中所設計的結構性材料，重點在引導兒童從邏輯關係系統中把握數的概念。本實驗中所使用的結構性材料（成子娟，2004，2005），是把加減法複雜關係設計爲相互聯繫的一系列智力操作（詳見圖五），其中：

- 第一步，兒童對包含 3/1/2 數量關係的集合作出分類，按顏色分類（1 個黑色圖形和 2 個白色圖形），按形狀分類（2 個三角形和 1 個方形）。
- 第二步，兒童把整體所包含的數量「3」和兩個部分所包含的「1」和「2」，用數粒表徵出來，並與數字對應；
- 第三和第四步，兒童可以直觀看到整體／部分／部分的數量關係及其加減法的互逆關係（1 + 2 = 3，3 – 2 = 1，2 + 1 = 3，3 – 1 = 2）。

圖五：分類數的分解組合和加減法關係模式



以上設計理念，貫穿於實驗組兒童對於 1 至 10 每一組數量的整體／部分／部分關係的學習和理解。

10 以內每一組數量的整體／部分／部分關係包括：10（1/9、2/8、3/7、4/6、5/5）；9（1/8、2/7、3/6、4/5）；8（1/7、2/6、3/5、4/4）；7（1/6、2/5、3/4）；6（1/5、2/4、3/3）；5（1/4、2/3）；4（1/3、2/2）；3（1/2）；2（1/1）。兒童對每一組關係的學習都是按照以上四個結構模式進行，即集合分類、集合和類別的數量表徵、數量的組合和分解、加法和減法。

這些結構模式可以支援兒童在一個有限的空間，觀察、分析和概括數量的邏輯關係。比如，數量會依據集合類別的不同而變化，三個棋子和數字「3」的對應關係、1 和 2 或 2 和 1 都能組成 3，位置的變化不影響整體等等。這些模式的設計，不僅可以幫助兒童理解基數 1–10 的基本組成和分解規律，更可以幫助兒童從中發展逆向思維能力。這種能力可以幫助兒童認識加法和減法的逆向關係。比如，實驗組教學把數的組合與加法、分解和減法放在同一操作平面上，使加減法的學習結合起來。加法和減法在時間和空間上結合的模式，促進兒童把兩個概念當作一個關係來理解和掌握。而分隔的模式令兒童把加法和減法割斷成兩個孤立的問題看待，結果使加法和減法的操作能力不能同步提升。可見，數量關係結合模式的設計，有利於兒童理解數量的整體／部分／部分關係。相反，分隔的模式會阻礙兒童對這些關係的理解。

本實驗的這些設計理念，幫助兒童依據數量整體與部分之間的邏輯關係作出定向思考。這可能是實驗組兒童能把握較爲高級的計算策略和得出準確計算結果的重要原因。

對照組兒童使用各種非結構性材料學習加減法。這些非結構性材料雖然可以直觀地表現一定的數量，但是相比之下，它並不能自動、全面和有系統地反映數量之間的邏輯關係。當然，更不能依靠處於前運思階段（preoperational stage）的兒童自然發現這些關係。比如，兒童遊戲活動中所出現的各種物品是散亂堆放的；傳統教材中圖畫加減法則多是兩個並列的序列，如圖加法（●●●●● ○○○ 兩堆物件加起來有多少個？）和圖減法（●●●●●~~○○○~~ 減掉白色的還剩下多少個？）。

很明顯，刺激兒童得出這些材料的總數或差數的方法，只能是數數。數數只能幫助兒童孤立地和直觀地了解材料的數量，較少能引起兒童系統地思考數量的整體與部分關係。此外，加減法學習在時間和空間上分離，不能引起兒童對加減法互逆關係的思考。

對照組兒童也用紙筆計算方法做大量加減法習題，而這種方法距離兒童認知發展水平更加遙遠。若兒童不能理解數量關係，便會導致更多機械式的記憶（Cheng & Chan, 2005）。在本研究的後測中，對照組兒童對於數字比較小的題目（如 2 ＋ 6 和 5 － 2）多能立即給予答案。Baroody（1994, 1999）將這種策略界定爲明顯的計算缺乏，因爲並不能由此認爲兒童能在腦中計算或推斷結果。雖然這種現象亦見於實驗組兒童，但很多實驗組兒童能夠用數的分解組合原則解釋答案。對照組兒童對於數字比較大的題目（如 5 ＋ 8）多依靠數手指。這顯示兒童的計數水平並不能真正和完全反映兒童對於數量關係的理解（Cheng & Chan, 2005）。

學前兒童認知的具體性和數學邏輯的抽象性，兩者形成了強烈的對比。長久以來，西方社會奉行兒童從與環境的互動中建構數學概念，而兒童在這類活動中多接觸非結構性材料，恰恰非結構性材料卻不能反映數量的邏輯關係，所以，兒童的數學邏輯發展多順應自然的認知發展時間表，很多時則表現出「數學無能」。從以上的對比分析可以明顯看到，非結構性材料不能協助兒童彌補認知的不足，亦證明了在這種條件下，Piaget 對於兒童數學能力的評估的客觀性。這個結果亦從實證研究的角度支持了美國官方機構有關「自由遊戲對於促進早期數學思維發展是不足夠的」（Ginsburg, Kaplan, et al., 2006; NAEYC & NCTM, 2002）的假設，原因是兒童在自由遊戲中所接觸的數學概念，大部分受制於非結構性材料的局限。此外，正因爲兒童的認知發展更有局限，抽象的紙筆運算亦不適合。由此可見，結構性材料的意義就在於通過結構化的設計，把抽象的數量關係具體化和形象化。本研究把數量的整體與部分關係具體化和形象化，這便彌補了兒童認知發展的不足，協助兒童跨越認知障礙。

結構性材料的設計理念是十分重要的因素

本研究結果支持 Chao et al.（2000）的一些結論，即結構性材料有利於兒童選擇較爲高級的計算策略而放棄手指數數策略，同時能提高計算速度，而非結構性學具有利於兒童採用手指數數的策略。但是，本研究的結果不支持「採用結構性材料會影響兒童計算的準確性，而採用非結構性材料會提高計算的準確性」（Chao et al., 2000）的結論。

若結構性材料的設計理念不同，所產生的學習效果亦會不同。用於學前兒童學習數學的結構性材料很多，比如 10 個方格至 100 方格不等的數學學具，不僅廣泛得到使用，而且歷史也很悠久。但是，以往利用這些學具只是爲了幫助兒童數數和認識數字，很少像本研究這樣把數量邏輯關係在這樣的學具上設計應用出來。因此，即使利用外部構造相同的學具輔助兒童學習數學，但由於使用學具的設計理念不同，學習結果亦會大大不同。本研究結果與先前研究（Chao et al., 2000）結果的不一致，可能由於使用學具的設計理念不同所致，因爲數量邏輯關係的設計理念並不是 Chao et al.研究的重點。

參考文獻

成子娟（2003）。〈學具的邏輯構造和操作對於幼兒數概念理解水平的影響〉。載陳莉莉等（編），《兒童語文與數學》（頁 201–262）。香港：香港教育學院。

成子娟（2004）。《操作式學前數學》。香港：朗文香港教育。

成子娟（2005）。《操作式學前數學》教科書。香港：朗文香港教育。

成子娟、賈非、馮志堅（1992）。《兒童數學智能培養的理論與教學》。吉林：吉林教育出版社。

Baroody, A. J. (1994). An evaluation of evidence supporting fact-retrieval models. *Learning and Individual Differences*, *6*(1), 1–36.

Baroody, A. J. (1995). The role of the number-after rule in the invention of computational shortcuts. *Cognition and Instruction*, *13*(2), 189–219.

Baroody, A. J. (1999). The roles of estimation and the commutativity principle in the development of third-graders' mental multiplication. *Journal of Experimental Child Psychology*, *74*(3), 157–193.

Baroody, A. J., Lai, M. L., & Mix, K. S. (2006). The development of young children's early number and operation sense and its implications for early childhood education. In B. Spodek & O. N. Saracho (Eds.), *Handbook of research on the education of young children* (2nd ed., pp. 187–221). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Baroody, A. J., Tiilikainen, S. H., & Tai, Y. C. (2006). The application and development of an addition goal sketch. *Cognition and Instruction*, *24*(1), 123–170.

Bobis, J. (1996). Visualisation and the development of number sense with kindergarten children. In J. Mulligan & M. Mitchelmore (Eds.), *Children's number learning* (pp. 17–33). Adelaide, Australia: The Australian Association of Mathematics Teachers.

Carey, S. (2001). On the very possibility of discontinuities in conceptual development. In E. Dupoux (Ed.), *Language, brain, and cognitive development: Essays in honor of Jacques Mehler* (pp. 303–324). Cambridge, MA: MIT Press.

Chao, S. J., Stigler, J. W., & Woodward, J. A. (2000). The effects of physical materials on kindergartners' learning of number concepts. *Cognition and Instruction*, *18*(3), 285–316.

Cheng, Z. J., & Chan, L. K. S. (2005). Chinese number-naming advantages? Analyses of Chinese pre-schoolers' computational strategies and errors. *International Journal of Early Years Education*, *13*(2), 179–192.

Clements, D. H., & Sarama, J. (2005). Young children's abstract mathematical thinking. *Hong Kong Journal of Early Childhood*, *4*(1), 5–10.

Ginsburg, H. (1977). *Children's arithmetic: The learning process*. New York: D. Van Nostrand.

Ginsburg, H., Kaplan, R. G., Cannon, J., Cordero, M. I., Eisenband, J. G., Galanter, M., et al. (2006). Helping early childhood educators to teach mathematics. In M. Zaslow & I. Martinez-Beck (Eds.), *Critical issues in early childhood professional development* (pp. 171–202). Baltimore, MD: Paul H. Brookes.

Ginsburg, H., Klein, A., & Starkey, P. (1998). The development of children’s mathematical thinking: Connecting research with practice. In W. Damon, I. E. Sigel, & K. A. Renninger (Eds.), *Handbook of child psychology* (5th ed., Vol. 4, pp. 401–476). New York: John Wiley & Sons.

Mandler, J. M. (2003). Conceptual categorization. In D. H. Rakison & L. M. Oakes (Eds.), *Early category and concept development: Making sense of the blooming, buzzing confusion* (pp. 103–131). Oxford; New York: Oxford University Press.

National Association for the Education of Young Children, & National Council for Teachers of Mathematics. (2002). *Early childhood mathematics: Promoting good beginnings*. Retrieved February 8, 2007, from http://www.naeyc.org/about/positions/pdf/psmath.pdf

Opper, S. (1996). *Hong Kong’s young children: Their early development and learning*. Hong Kong: Hong Kong University Press.

Piaget, J. (1965). *The child’s conception of number* (C. Gattegno & F. M. Hodgson, Trans.). New York: Norton.

Wynn, K. (1992a). Addition and subtraction by human infants. *Nature*, *358*, 749–750.

Wynn, K. (1992b). Children’s acquisition of the number words and the counting system. *Cognitive Psychology*, *24*(2), 220–251.

Wynn, K. (1998). Numerical competence in infants. In C. Donlan (Ed.), *The development of mathematical skills* (pp. 3–25). Hove, East Sussex, U.K.: Psychology Press.

Zur, O., & Gelman, R. (2004). Young children can add and subtract by predicting and checking. *Early Childhood Research Quarterly*, *19*(1), 121–137.

The Effects of Teaching Materials on Children's Understanding and Choice of Computational Strategies in Addition and Subtraction

Zi-Juan CHENG

Abstract

This study investigated and compared the effects of two different types of physical materials (aids with structurally organized patterns vs. objects with randomly varying patterns) on children's potential logical thinking development. Two groups of children at age of 4.5 to 5.5 years old were taught addition and subtraction systematically with either one of these types of teaching materials. Comparison of their performance showed that the aids with structurally organized patterns could facilitate children's understanding of addition-subtraction relations (part-whole relations in numbers). Children's understanding of such relations enhances their choice of decomposition/ combination strategies, which subsequently reduced their confusion and errors in computation.