變式課程設計原理——數學課程改革的可能出路

摘要

世紀之交，世界各地均進行數學課程改革，其中如何兼顧基本功及高層次思維能力成為了突出的問題。從「數學化」的角度，數學教學不只要在兩者之間找出平衡點，而且要搭建由基本功通往高層次思維能力之路。本文參考了教育心理學的相關理論、中國內地的實踐經驗和數學及數學學習的本質，提出螺旋變式教學課程的設計原理，希望提供一道數學課程改革的可能出路。

世界各地數學課程趨勢

近年各國均不約而同進行教育改革（李子建，2002），數學教育亦不例外，各地紛紛推出新課程，其中包括：

- 美國——1989年國家數學教師議會發展《數學課程及評鑑標準》，後經廣泛諮詢，最終於2000年再發表《學校數學的原理與標準》。期間出現了「加州數學戰爭」的插曲；這場爭論由1992年的加州數學新課程引起，最後「回到基本」，敲定以1999年一些人認爲較「保守」的課程爲標準。

- 英國——1989年推出《國家課程》，經過多次修訂，於2000年由「教育就業署和資歷及課程局」頒布「千禧版」的《國家課程》。2004年又頒布了關於高中數學教育的《讓數學算數》（*Making Mathematics Count*）報告書。[1]

- 澳紐——澳洲於 1990 年發表《澳洲學校數學國家宣言》，此後各省陸續發展其數學課程。例如維多利亞省於2000年頒布新的數學課程框架。紐西蘭亦於1992年頒布了《紐西蘭課程中之數學》。

- 歐陸——其他歐洲國家亦進行了數學課程改革，例如德國在 1991 年統一後，各省重組學校課程。法國、荷蘭等國家均有新的數學課程。

- 中國內地——1992 年推行義務教育及一綱多本政策；1997 年推行多綱多本政策。 2001 及 2004 年分別頒布了基礎教育數學課程及高中課程。其中改革亦帶來不同的意見。雖然於 2005 年進行了討論與調整，爭論至今仍然持續。

- 台灣—— 1996 年推行「建構數學課程」， 2001 年推行「九年一貫數學課程」，期間爭論不斷（甚至有要求「暫停建構」），課程到 2003 年再經修訂之後，又有回到早期課程的味道。

- 香港——於1996年推行的目標爲本課程，惹來不少爭論，至1997年教育署進行了數學課程全面檢討， 2000 年前後頒布了新中小學數學課程。與此同時，有關方面推行教育改革， 2004 年推行基本能力測試，同年提出的新高中學制改革，帶來了更多爭議。

- 澳門——回歸後於1999年頒布歷來第一份數學課程，現正作進一步修訂。

- 日本——差不多每隔十年都會修訂數學課程一次，最近一次爲了加進「綜合學習」，把 2000 年修訂的數學課程內容削減了 30% ，帶來反對聲音，甚至有人以「日本數學戰爭」來形容；課程最後於 2002 年推行。

- 其他亞洲國家——南韓於 2000 年的課程加入了選修課，並削減了 30% 的課程內容以騰出學習資訊科技的

時間。新加坡在1997年重新修訂課程後，又於2001年再度修訂以引入高階思維。馬來西亞於2001年提出「智慧型學校」的概念，發展相關的數學課程，並大量引進資訊科技。此外，泰國、越南、菲律賓等於新千禧期間亦紛紛推出新課程。

各地新課程的數學內容不盡相同，改革步伐亦各異，但綜觀相關文件，不難發現以下「共通語言」，可見世界各地數學教育所面對的挑戰有不少共通的地方（詳見黃毅英，2004b，2005b；Wong, Han, & Lee, 2004）：

- 資訊科技教學；
- 高階思維；
- 道德價值；
- 一般共通能力；
- 生活數學；
- 專題研習；
- 愉快學習；
- 態度；
- 選修數學與核心課程；
- 基本能力；
- 學習範疇；
- 評準、達成指標。

其中改革的原動力當然不止於「2000」這個數字，而更因爲「世界變了」。在全球經濟一體化及「知識型社會」的轉型過程中，「工種」與工作性質亦變了。無人可以預計學生離開學校時需要些甚麼知識與技能，所以學校轉而培養學生終身學習的基礎（Delors, 1998；Mathematics Sciences Education Board, 1989; Organisation for Economic Co-operation and Development, 1996），乃至培育下一代使能塑造屬於他們自己一代的社會（不單能適應既有社會，更具備未來社會公民的知識、技能和素養）（黃毅英，

1995）。故此，學會學習、全方位學習，包括創新能力的高層思維，踏進了教育改革的舞臺，衍生了輕具體知識、重內在能力，重視價值教育、態度，鼓吹跨學科學習等一大堆想法。然而，要騰出時間施行這些新意念，便需引申到課程統整、核心課程、共通能力、基礎能力（台灣稱基礎學力）、達成指標等的具體措施。

隨着普及教育的推行，如何照顧個別差異，如何讓學生能一步步按自己的學習節奏前進，如何在提升高層次的思維能力及共通能力之餘又不會丟失堅實的學科基礎，以及如何在「過程」與「內容」間找到平衡，是眾多問題中的「重中之重」。

小 結

各國數學課程改革的新趨勢反映了社會轉型的挑戰，培育下一代的高層次思維能力至爲重要。但如何同時保留穩固的基礎知識是當前數學課程發展中刻不容緩的任務。

香港中小學數學課程的發展

縱觀香港中小學的數學課程改革，以20世紀60年代的「新數學運動」與90年代的「目標爲本課程」較爲人注目（例見香港教育統籌委員會，2001；歐用生，2000；Esteve, 2000）。不過從課程歷史來看，小學數學課程在60年代亦進行了一場改革。有趣的是，60年代小學數學課程改革、中學新數學運動，以及90年代目標爲本課程三者之間有着微妙的關係。

新數學的理念於1962年透過香港大學數學系教師的講座等引進香港。1964年伊利沙伯中學率先在校內試行，隨後風靡香港數學教育界。1965年，牛群學社出版了本地第一本新數學教科書，翌年更加發行中文版。中學會考亦制訂

「課程乙」加以配合，首屆學生於 1969 年應考。新數學着重數學結構、自我發現與概念形成，其中大量引入了符號邏輯、集合論、關係、函數、幾何變換、數導、統計與概率等新課題（有關歷史詳見黃毅英、黃家樂，2001）。

隨着西方反對新數學，提出「回到基本」，適逢課程發展委員會於20世紀70年代成立，新數學課程的局面得以檢討。1975 年，課程發展委員會統一了新、舊數學的內容，制訂首個課程發展委員會數學教學大綱（俗稱 CDC 大綱）。大綱經過多次修訂，香港課程發展委員會最終於 1985 年頒布了統一的《中學數學課程綱要》（香港課程發展委員會，1985）。雖然事隔二十年，該綱要仍然是今天中學數學課程的骨幹（見黃毅英、黃家樂，2001）。

至於20世紀90年代提出的目標爲本課程，本來旨在回應普及教育衍生的種種問題，訂立學習目標（learning target）及相關評估（target-related assessment）。理論上，這是爲學習者訂定學習階梯，讓他們可以按目標一步步前進。每一步又透過目標評估，以了解學生是否準備好學習下一步；中間又引入課業（task）及表現評級等理念，希望把數學融入實際處境（context）（Clark, Scarino, & Brownell, 1994）。

於是，學習目標、課業、表現等級便成爲了目標爲本課程的三大基石，這正正回應了上述個別差異、學習興趣及高層次思維能力「重中之重」的問題。

在這兩場改革之外，20世紀60年代中至80年代初期，小學亦進行了一場規模不小的課程改革，其主軸爲「兒童爲中心的數學學習」。

1960 年，納菲爾特（Nuffield）數學教學實驗計劃及其他「以兒童爲中心」的數學教學實驗計劃正在英國進行

得如火如荼，其背後的理念主要來自英國哲學家懷海特（A. N. Whitehead）和瑞士心理學家皮亞傑（J. Piaget）。懷海特於其 1929 年的著作〈教育的目的〉內提倡「每個兒童應體驗發現的喜悅」（Whitehead, 1929/1949, p. 14）。所以，並非獲取知識本身，而是自我思考和發現才是非常重要的教育目的。英國數學學會在 1955 年發表的報告確認只有通過不同的遊戲、實驗、具體實物的操作等，兒童才會從「活動」和「經驗」中慢慢體驗到事物的關係，從而建立數與形的概念以至基本的數學思維模式（Mathematical Association, 1955）。在更闊的層面，按照莫禮時（1996）的分析，兒童爲中心的教學理念是進步主義的產物（見表一）。由「學習應由學生的周遭事物出發並要他們成爲主動的學習者」這個意念出發，衍生了自我發現、探索、不應以學科主導學習、專題研習、建構式學習、問答（包括學生之間）、互動式社群建構學習、跨學科綜合能力學習、課程統整、共通能力、通識教育等一大堆理念。

香港小學數學課程發展人員當年把「以兒童爲中心」的數學教學理念引入，於 1967 年成功將當時的小學算術課程發展成爲第一份小學數學課程。隨着十進制於 1970 年初引入，透過刪減小學數學課程中繁複的兌換題，進一步騰出空間，以進行兒童探索式的活動。而隨着活動教學於 1972 年試驗推行，「以兒童爲中心」的數學教學在教師教育、研討會與專業團體活動中得到試驗與實踐。這正好配合小學免費教育於 1971 年的推行。1983 年版的《今天小學數學課程的藍本》可說是這些教學實驗的總結（詳見鄧國俊、黃毅英、霍秉坤、顏明仁、黃家樂，2006）。

小學納菲爾特教學實驗、中學新數學運動、目標和課程，箇中成敗得失姑且勿論。它們雖然看似互不相關，但從普及教育與社會轉型的角度卻可看到當中的主線與共通點如下：

表一：課程的觀念與組成部分

組成部分	觀念：學術理性主義	社會及經濟效率	以兒童爲中心	社會重建主義
意向	促進學生的智力和認知能力，並教導他們如何學習	爲社會提供現在和未來的人力需要	提供促進學生個人和智力發展的機會	學校是社會的改革者、改變者及評論者
內容	着重學術性學科衍生的知識、技能和價値觀	着重與將來就業有關及有用的知識和技能	着重學問是綜合和全面的整體，及學習的過程	着重社會的需要、問題和理想
教與學的方法	着重教師的解說、教導式的教學法和鼓勵探究的技能	強調掌握和運用技能	強調學生的活動和自我學習，教師的角色爲輔助者	着重相互作用、小組活動和學生對社會事務的參與
評核	強調測驗學生的知識、技能和學術的嚴格訓練	強調評核學生運用知識和技能的能力	着重質量的量度以分析學習的過程	着重學生參與自我評核的需要

資料來源：莫禮時（1996，頁12）。

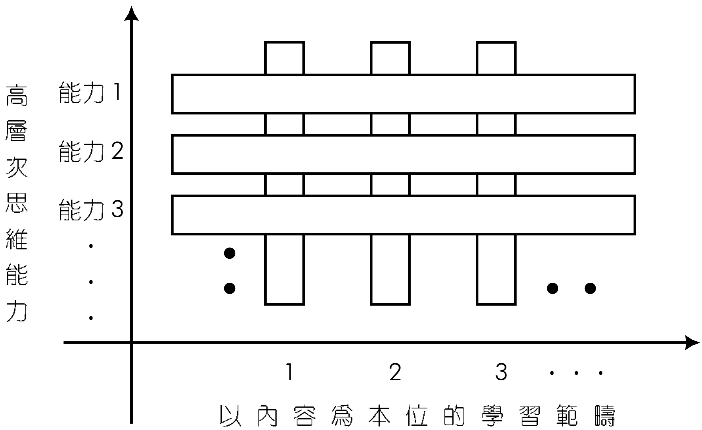
- 教育面對全民學生的學習動機參差，數學學習要做到「沒有眼淚」[2]；
- 要讓學生變成學習的主體，減輕「注入式」（灌輸）教學；

- 讓學生自我探索，「再發明」（re-invent）數學；
- 與此同時，不要讓學習放任自流，要制訂學習目標；
- 學生能按個別需要，循着這些學習目標前進，用這個方法處理學習差異；
- 於轉型的社會中，零碎知識變得不重要，要「學會學習」，着重高層次的思維能力和數學的知識結構。

以上改革可謂非常合理，但其中卻涉及「p 與 p」的課題，其中一個 p（product）表示學習結果，包括學習內容（content）；另一個 p（process）表示學習過程，包括所謂的「過程能力」。這個討論，至少可以追溯到 1975 年美國國家數學教育指導委員會報告書（National Advisory Committee on Mathematics Education, 1975），當中提出不應將 p 和 p 看成對立面（dichotomy）。我們應當探討怎樣在教授數學知識的同時，以之作爲培養深層能力的基礎。1986 年，國際數學教學委員會（International Commission on Mathematical Instruction, ICMI）科威特研討會中前瞻 20 世紀 90 年代的數學教育，對所謂「過程爲本課程」（process-based curriculum）有不少批評，最後得出的結論是要在「p 與 p」之間找出平衡（Howson & Wilson, 1986）。

究竟過程與結果如何平衡？「怎樣在教授數學知識的同時，以之作爲培養深層能力的基礎」（黃毅英，1995，頁 71）？「是否應該把基本功作爲培養能力的基礎」？這甚至亦是一個課程問題。上面的例子就是把知識維持在教學的主線，在這個主線上培養能力，這與香港數學課程全面檢討報告的看法是一致的（香港課程發展議會全面檢討數學課程專責委員會，2000，頁 61）（見圖一）。這和美國的不同之處在於，它沒有把問題解決、傳意等作爲獨立的課程標準（黃毅英，2004a，2004c；Wong, Han, & Lee, 2004）。

圖一：香港數學課程中內容與能力的定位



資料來源：香港課程發展議會全面檢討數學課程專責委員會（2000，頁 61）。

在課程安排上而言，假若大眾認爲還是應該依循一個較清晰的知識結構去組織數學課程，是可以在原有的課題中恰當地加入培養學生過程能力的元素。換句話說，就是讓學生學習數學內容的同時，發展探索自我等的能力，而不是把這些能力抽出來，變成獨立的課題去處理（黃毅英，2003b）。

換言之，學生仍是由數學四則運算邁向代數，從中獲得數感（number sense）與符號感（symbol sense）等；由圖形、圖形的分類學到演繹幾何，從中培養空間感（spatial sense）和邏輯推理；又由量邁向測量、估量等，獲得測量感（sense of measurement）、統計概念（statistical sense）、概率觀念（probabilistic sense）等（黃毅英，2003b）。

小 結

我們從香港本土的數學課程歷史脈絡中再一次看到，「內容」與「能力」的爭持仍然是課程發展前路中急須探索的問題，而重點不單是在兩者中間找出平衡點，而且更是如何搭建由基礎知識通往高層次能力之路。

向華人學習：華人學習數學基本模式的探求

華人學習現象迷思

以往一提到「華人」地區（所謂Confucian Heritage Culture地區）[3]的教學，均有落後守舊之感。華人學習環境強調背誦及記憶，每班人數甚多，學生被動，且以教師為中心及權威（Biggs & Moore, 1993）。隨着近數十年華人在世界上的卓越成就（尤以數學科），使全球學者均在探視華人的學習模式（Wong, 2004）。雖然筆者不是說，現行華人社區的教學均甚為精闢獨到，但華人的一些教學傳統，以及一些現行的做法，是有優化教學的文化潛力（cultural potential），實在有其值得借鑑之處。

Huang（2002）就曾經試圖描繪一幅華人數學課的情景：課堂中有教師、有學生、也有數學，教師通過提供適當的「腳手架」，提出一系列富啓發性的問題，把數學內容呈現給學生，幫助學生投入於探索數學的過程之中。所謂「腳手架」（scaffolding），是Bruner等人（Bruner, 1985; Wood, Bruner, & Ross, 1976）按照Vygotsky（1978）「最近發展區」（zone of proximal development）的想法發展出的構思。簡言之，就是安排一道學習階梯，其「步寬」是學生可以接受而又具一定挑戰性的，不太闊又不太窄。

在這種教學環境中，學生聆聽着教師的講解，熱衷於學習過程之中」（p. 237）。他繼續評論說，「根據一些

西方觀念如教師中心或學生中心，則很難理解這種描述，然而在華人的文化背景下，這很容易理解而且很現實，因此可能是文化差異造成的」（p. 237）。Watkins & Biggs（2001）還指出，在一個上佳的、華人地區的學習環境下，由「集中性學習」、「由他人〔教師〕安排的」、「精心計畫，定時提問及相關的活動」和「訓練學習者的學習」這些要素構成的景象，在西方人看來卻是重複和以教師爲主導的。據以上所述，我們可以確定華人地區課堂環境的一個普遍情況，概括如下：

- 學生循規蹈矩，聚精會神聽教師講解；
- 教師教學內容準備充分，結構嚴謹；
- 學生很少提問來打斷教學流程；
- 教師通過提問檢查學生聽課情況；
- 教師不會在課堂上照顧個別差異；
- 學生課後仍有不少學習機會（包括作業、輔導班）；
- 教師課後給予個別輔導；
- 教師注意到對個體擔負的道德培養責任，包括與學習無直接關聯的方面（如個人成長、文化價值傳播，或作爲聆聽者）。

對香港學生的調查反覆表明，學生心目中的優秀數學教師應當講解清晰、關心學生、視學生爲朋友、確保學生理解、教學生動和認真、準備充分、爲學生答疑解難（包括在課後）。優秀的數學教師亦要爲學生提供大量練習，創造有秩序而又活潑的氣氛；而良好的學習環境是指課堂氣氛不沉悶又很安靜，學生都投入學習，循規蹈矩，課後能與同學討論（Wong, 1993, 1996; Wong, Lam, Wong, Leung, & Mok, 2001）。

上述華人地區課堂的圖像可能與Ausubel（1961, 1963, 1968a, 1968b）提倡的「教師爲主導，學生爲中心」的學習環境一致。Ausubel指出其「有意義的口語教授」

（meaningful verbal instruction）與死記硬背的學習有所不同。老師透過有意義的口語教授，能有效地把學生的認知結構與學科知識結構聯繫起來。在Ausubel提倡的表達法中，教師在表述的同時，透過不斷發問以獲取學生的回饋，即時調節教學，這便做到既以教師為主導，同時又以學生為中心（Bell, 1978）。實證研究亦發現，「傳授」與「學生中心」是兩個不同而非對立的度向（見Perry, Tracey, & Howard, 1998）。換言之，「傳授」與「學生中心」並不互相牴觸。

第三次國際數學及科學錄像研究提出了「東方」數學課堂的特性，就如Ausubel（1961, 1968b）所說的「以教師為主導但以學生為中心」（黃毅英，2004b，2005b；Leung, 2004）。Watkins & Biggs（2001）亦提出這種「以學習為中心」（learning-centered）——有別於「以學習者為中心」——的華人課堂常規的狀況。在這個環境中，學生被動但投入，教師主導並同時監察（monitor）學生的學習，作出適時的調整；以大班教學但在課後處理個別差異（包括個人輔導）（Wong, 2004）。這也許在某個程度來說描述了華人課堂學習的現況。

教育工作者要問，自己所追求的應該是哪一種學習：

- 全然以學生主導（「滿堂問、滿堂動」）；
- 全然以教師主導，學生安靜地聆聽（「滿堂灌」）；
- 教師帶動，透過不斷的回饋與調節，以達至某程度學生為中心的學習（「教師為主導，但以學生為中心」）；
- 教師某程度上是一個導演，責任只在於提供一個有利的條件讓學生學習。

教師在這個教學過程中還應否有特定的預期學習成果？若果有，又是甚麼成果？（這又關乎「p與p」的問題。）

要邁向這些成果，老師不可能完全不參與，而只期望學生自行獲得這些成果。老師的參與／干預又應至甚麼程度？

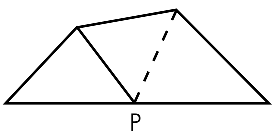
教育由篩選轉爲普及，由課程主導，要求學生適者生存，轉爲以學生主導，希望教育能在學生群體中發揮最大效能，如此一來，提出「以兒童爲中心」是最自然不過的事。但怎樣才算是「以兒童爲中心」呢？是任由學生自由探索、發現，還是由教師作爲學習的導演？教師由所謂的「知識的提供者」到「學習的促進者」，當中的「範式轉移」怎樣達成？又所謂「引導性發現法」（guided discovery），究竟引導到甚麼程度？自 20 世紀 60 年代新數學運動提出「p 與 p」的問題，到目標爲本課程及《學會學習》文件中提出的九大共通能力，以至通識教育科的設置，似乎均在重複這個討論（黃毅英，2002c，2005c），教育工作者應作出一個深入細緻的定論。

在一個研討會中，一位美國數學教育專家 Heddens（1994）闡述建構主義式的教學時，借助一些學具（manipulative）讓小學生發現數學結果，然後分組匯報。Heddens一再強調，要點是老師不能參與，縱使學生得到一些錯誤的結果（並作匯報）時，教師亦不應插嘴，不用糾正，因爲錯處應由學生日後自己慢慢發現。當然，這當場引起華人學者的一陣哄動，難怪顧泠沅（在後來的一個場合）寫了「尋找中間地帶」一系列文章（顧泠沅、易凌鋒、聶必凱，2003；Gu, 2000），可見東、西方在這些教育問題上的觀點仍然是南轅北轍（又見黃毅英，2003a）。

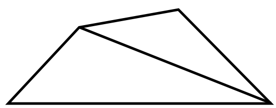
再舉一個實例：學生已知三角形的內角和，學生在老師的引導下，知道需要把四邊形分割成三角形去求四邊形的內角和，於是老師讓學生在座位上自行探索。有學生如圖二a般分割，老師說這是可以的，因爲三個三角形的內角和共爲540°，扣回 P 點的平角就是 360°。但以「中國式的自我發

現法」，老師容忍這種做法是不智的。因爲這是很難推廣到 n 邊形內角和的規律，老師必須引導學生在一開始已用對角線分割（如圖二 b）。從這個例子，老師作爲導演的角色至爲明顯（以上討論見鄧國俊等， 2006）。

圖二：四邊形內角和的發現過程



圖二 a



圖二 b

從「入法」到「出法」

在實際的學習層面，不少學者提出基本功是創意不可或缺的基石。 Gardner（1989）透過中國幾種傳統藝術（包括書法和京劇）的學習，指出向大師模仿基本功（modeling）是創新的階梯（頁 257）。 Wong（2004）透過分析中國幾門傳統學問（包括拳術、書法與篆刻）的學習模式，進一步指出「入法－出法」的傳統學習之路。它們的訓練大抵均是由基本功開始，得到「入法」（如《孟子・離婁上》說「不以規矩，不能成方圓」），再透過老師的啓迪，進行「出法」。這些「出法」的手段包括反思及引起「疑情」的智性衝擊。雖然「出法」沒有定法，但沒有「入法」，就很難得到「出法」。所以，以基本功爲核心的「入法」還是十分重要的。在上述的華人學習環境下，基礎知識以高效率、大範圍在課堂內傳遞，學生得到「入法」。課後有個別輔導，以期實現「出法」（縱使這可能很偶然）。爲了實現這一劇本，可以想像，

注意力和課堂紀律是首要考慮之事。所謂「紀律」，遠不止「服從」這麼簡單。學生要知道並遵從課堂教學的各種常規：何時講話、何時在座上做堂課、何時打開課本、何時看黑板（或電腦投影）等等。沒有這樣一個文化假設（學生知道何時該做何事），「教師主導，學生中心」的體系就不能實現。這些「訓練」是通過強化、社群契約、遵從、社群協商來實現和發展的，這在華人的課堂和華人的教師教育中是常見的。例如學生在小時候就已經知道，先要舉手並要得到點名方可站起來講話（Wong, 2004）。這種訓練既是手段亦是目標，讓學生成爲聽眾，而不是議眾（listenership以別於speakership，見Hatano & Inagaki, 1998; Inagaki, Hatano, & Morita, 1998）。

在數學上，導致「出法」的其中一個手段要算是數學題的變化。因爲透過變化，原先能解決的問題，一時間又解決不了，對學生做成不安（threat of discomfort）（Cronbach, 1955），迫令學生「轉向找尋統攝較低層次法則的高層次法則」（Scandura, 1977），於是解決問題的能力得以提升（又見黃毅英， 1990；Wong, 1998）。

小 結

「老師帶動，但以學生爲中心」的教學模式，可能是華人課堂學習的基本模式。在有規範的課堂常規內進行基本功的訓練（「入法」），再利用各種啓導，引發創意思維等高層次思維能力（「出法」）。雖然筆者並不是說「中國式」的教學方式屬於完美或放諸任何文化背景均可行，而筆者更不認爲有一種統一的「中國式」教學模式，不過中國傳統教學模式中在「入法」之後，透過「變」進行「出法」的這個想法，可能對如何構建由基礎到高層次能力之路有所啓示。

變異教學理論

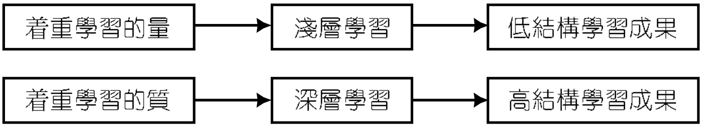
利用正反的對比去促進概念形成由來已久（見鄭肇楨，1984）。歐陸的現象圖式學（phenomenography）於20世紀60年代開始探討人對同一現象的理解內涵，發覺不同的人對同一現象可以有不同的質化和豐富程度的理解。例如Marton, Dall'Alba, & Beaty（1993）及Pramling（1983）等利用現象圖式學的研究，發現人對「學習」的理解可以蘊含增進知識、記憶及提取、應用學到的東西等。Helmstad & Marton（1991）又對「理解」作現象圖式學的分析，發現人對「理解」的理解又可以蘊含以下幾個度向：

- *存在性理解*（existential understanding），其中包括「原來如此」（that something is the case）、「究竟如何」（what really is the case）及「何謂某物」（the meaning of something）；
- *詮釋性理解*（hermeneutic understanding），包括「別人眼中的某物」（what things look like for another）及「一句說話的意義」（what an expression means）；
- *現象性理解*（phenomenological understanding），包括「某物如何運作」（how something works）、「何以某物如此」（why something is the case）及「內蘊規律或結構」（inherent regularity or structure）。

Biggs（1991）進一步提出學習者的學習取向與其學習成果有質的差別：淺層取向導致結構散漫的學習成果，而深層取向導致嚴密的知識結構（圖三）。

如何能對學習成果有較豐富的理解呢？20世紀90年代中期開始，Marton等人（包括Bowden & Marton, 1998;

圖三：學習取向與結果的關係



資料來源：Biggs（1991, p. 11）。

Marton & Booth, 1997; Runesson, 1999）開始重新檢視現象圖式學的過往成果，他們首先認定變異（variation）是審辨（discernment）的要素。簡言之，假如全世界只有綠色，就不可能有顏色這個概念；世界上若只有「2」一個數字，量的概念就不存在。要形成「量」這個概念，就要透過數字的變化去達成。2 這個量就是量中在「2」的不變量，這與數學上「2 乃爲一切 2 個橙、2 個人……的抽象」相吻合（黃毅英，2005a）。

此外，每一個概念可以包含不同度向。例如「2」既有量，亦有序，也有「倍」。「½」是一個實數，亦含有「全部之半」的概念。協助學生順利建立這些概念的不同度向，要透過變與不變的呈現來達成。例如，呈現不同顏色、不同大小、不同物料、不同位置、不同方向（orientation）的等腰三角形去展示等腰三角形的等腰性（變：顏色、大小、位置、方向；不變：等腰）。所以 Marton & Booth（1997）提出在不同度向的覺知（dimensions of awareness）。正如 Marton & Booth 的著作 *Learning and Awareness* 的書題「學習與覺知」所顯示，學習就是對於同一觀念，在逐一度向拓展其覺知。

宏觀而言，學生的「經驗空間」（lived space）愈闊，學生的學習結果空間（outcome space）理應愈豐富。透過

對經驗空間引入變異，學生的理解就應該愈豐富（Wong, Marton, Wong, & Lam, 2002），由是提出了「變異教學理論」（pedagogy of variation）（祁永華、謝錫金、岑紹基，2005; Marton, Runesson, & Tsui, 2003; Runesson, 1999）。

2000 年，黃毅英、林智中、黃家鳴的研究小組得到了 Marton 的參與，進行了「透過有系統地引入變異促進學生數學問題解決能力」的研究，在 10 班中一的數學課引進非常規題。總的來說，不只學生的數學觀擴闊了，他們解決數學開放題的能力亦有所提高（Wong, Chiu, Wong, & Lam, 2005; Wong, Lam, Wong, & Chiu, 2005）。

變式教學

在中國內地，20 世紀 80 年代顧泠沅等人於上海青浦進行了長期的教學實驗，引進變式教學，透過題型有系統的變化使學生的學習得到很大的躍進。1977 年時，一次全縣中學畢業生基本數學知識普查顯示，4,300 餘人的平均成績僅 11.1 分，及格率只有 2.8% ，零分人數高達 23.5%；1979 年，平均分上升至 32.5 分（約 5,000 人），及格率 16%；經過以顧泠沅等人的青浦縣數學教改實驗小組十年教改，1986 年，平均分已達 79.2 分，及格率達到 85% ，80 分以上的學生比率爲 62% ，青浦教育教學質量躍居上海各區縣的前茅。1991 年，由國家教育委員會基礎教育司以之作爲大面積提高教學質量的方法，向全國各地推廣變式教學爲青浦教改經驗之一（青浦縣數學教改實驗小組，1991；顧泠沅，1981，1994；Gu, 1992），而其成果於近年已推廣到全國（沈占立，2001；孫旭花、黃毅英，2005；曾慶豐，2004；劉建軍，2001；鮑建生、黃榮金、易凌峰、顧泠沅，2003a，2003b，2003c；戴啓猛，2002；聶必凱，2004；譚淵，2004；Sun, Wong, & Lam, 2005）。Marton

與顧泠沅於 2001 年會面，在理論與實踐之間得到結合，雖然兩者的出發點有別，做法亦有所不同。據 Gu, Marton, & Huang（2004）的分析， Marton 理論對概念形成有較強的基礎，而顧泠沅的做法對解決數學問題技巧的提升最有成效（又見 Huang, 2002），但基調都是透過有系統地引入變化，令學生不單可拾級而上，其學習亦可得到深化。

與此同時，張奠宙與戴再平提出，開放題是由基礎通向高層次思維能力的橋樑（Zhang & Dai, 2004）。開放題亦可視爲變式的一種。然而教育工作者必先回答如何搭建這道橋樑，才能摸索出打通由基本功通往高層次思維能力之路。顯然，給學生佈置的經驗空間不可能是愈多非常規題便愈好，數學問題亦不是愈開放就愈好。

上述的「透過有系統地引入變異促進學生數學問題解決能力」的研究中進一步發現，引入變異的成效視乎非常規題的「劑量」及學生的水平而定。透過層級回歸分析（hierarchical regression analysis），筆者發現中高水準的學生受惠於高劑量的非常規題，學習成績稍遜的學生則只能接受低劑量的非常規題。而過量的開放題會引起學生的恐懼（Wong, Chiu, et al., 2005; Wong, Lam, Wong, & Chiu, 2005）。這個結果可說屬意料之內，筆者需要後續研究才能得出更細緻的結果。正如 Gu, Marton, & Huang（2004）提出，教師需要小心鋪排恰當的腳手架去引入變式，讓學生從可觸及的範圍——所謂「最近發展區」——拾級而上（見 Gredler, 2001, Vygotsky, 1978）。

學習不是可規劃的事情。教學之所以是一項藝術，因爲教與學既因人而異，亦視乎處境而千變萬化，故此筆者無意提出一套如鐵板一塊的變式教學進程讓學生遵循（因爲老師應透過不斷細緻的教學診斷而因時制宜），不過變式教學的通則和框架可讓教育工作者有所參考。

根據中國內地經年累月的經驗，變式教學已有不同的面相與形式，例如 Gu, Marton, & Huang（2004）便抽取出其中兩個要素，就是概念變式和過程變式。除此之外，筆者不排除有其他變式的重點和方法。本文所提出的廣度和深度變式，是從課程設計的角度考慮，而這兩種變式可以成爲變式教學課程設計的主要元素。

小 結

無論變異理論或變式教學，似乎都體現了中國人由「入法」到「出法」的基本想法。透過有系統、有計劃地引入變化，學習者應能從基礎知識拾級而上。有關細緻的課程設計是值得教育工作者深入探索的課題。

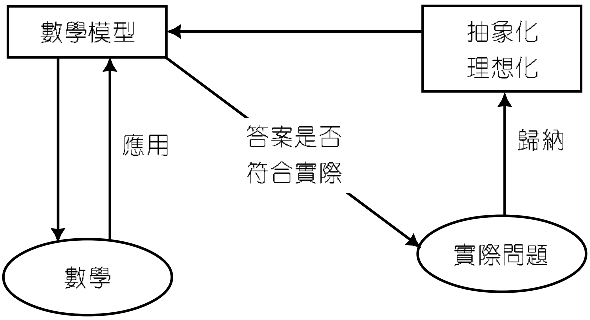
數學與數學教育的本質

從上面各節的討論，我們看到利用有系統的變化構建由基本功到高層次思維能力、由「入法」到「出法」這麼一道橋樑的潛質和必要性。在正式討論相關的課程設計理念之前，我們首先理清數學與數學教育本質的幾個基本問題。

數學的本質

蕭文強（1978）從分析數學的歷史發展，總結出數學發展源於生產實踐，從感性認知深化爲理性認知、從具體到抽象、從「歸納」到「演繹」等幾個結論。個別學習者的數學學習歷程與這個歷史發展過程亦相類似（又見 Siu & Siu, 1979）。蕭文強（1978）於《爲甚麼要學習數學》一書的後半部更介紹了數學建模的過程（圖四）。學生從眾多周遭的事物歸納出通則，提煉出相關的數學概念和運作體系，這就是 Freudenthal（1991）所說的「數學化」（mathematisation）過程。 Freudenthal 還分出水平和垂直數學化的概念（見黃家鳴，2000）。在美國的《學校數

圖四：數學建模



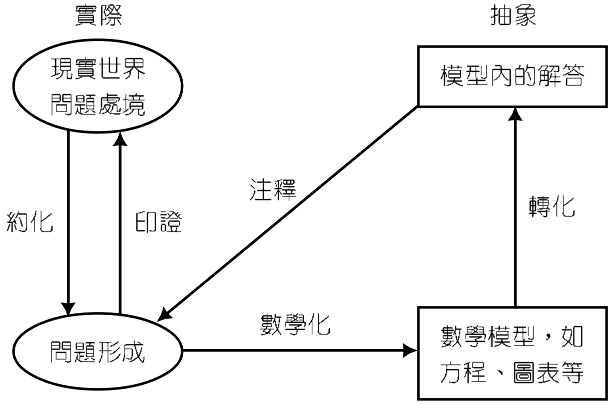
資料來源：蕭文強（1978，頁108）。

學課程評鑑標準》（National Council of Teachers of Mathematics, 1989）中，更正式將數學建模看成數學學習的過程。換言之，數學建模雖然是一種特定的數學方法，但別具「數學學習意義」。學生就是透過這種對現實世界各種現象的數學建模，建立數學概念，從而得到一雙「數學眼」，以數學探視、建立及解決各種問題，這就是數學化的過程（圖五）。這亦解釋了現實處境與數學間的關係。

但另一方面，不少學者（如黃家鳴，1997，1998，2000）指出生活數學的不足之處。Cooper & Dunne（1998）更把「現實數學」（realistic maths）和「內行數學」（esoteric maths）分開。雖然數學是來自生產實踐（蕭文強，1978），教師還是必須讓學生經歷「數學化」的過程，才能正式進入數學世界。

然而，具體與抽象是相對的。若將上述的數學化過程擴而充之，就是當學生從生活的實際現象中提煉出數學後，便可以把數學應用到更多的現實處境，亦可透過演繹推論出更多的數學。但學生也可以再次歸納數個數學處境而作進一步

圖五：數學建模與數學化



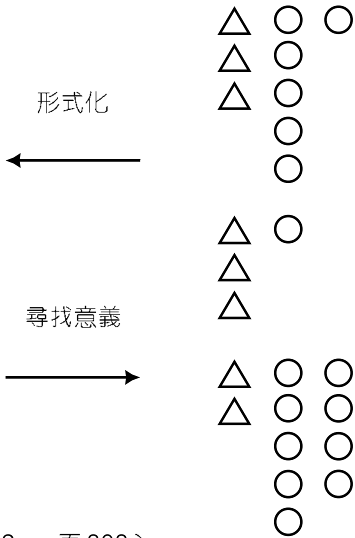
資料來源：National Council of Teachers of Mathematics（1989, p. 138）。

的抽象過程。例如學生從 1 個蘋果、 2 個橙抽象出 1 、 2 這些概念，再慢慢了解整個數字體系，懂得四則運算及其法則如「$1 + 3 = 3 + 1$」等。再過一段時期，他們可再進一步抽象到符號運算（如 $a + b = b + a,\ a, b \in R$），甚至把不同數系當成單一的數學對象去研究等（如 $N \subset R$ 、 $Z = Z^+ \cup \{0\} \cup Z$ 、 $Q = Z \times Z^*/\sim$ 等[4]）。

在學習過程中，即使在小學階段，教師亦不斷協助學生進行這種數學化的歷程，在現實世界中提煉數學，再在現實世界中尋找意義（黃毅英， 2002a ， 2002b）（圖六至八）。這種數學化的學習歷程與數學發展的本質吻合。透過有系統的變化促成這種數學化，亦是下面闡述的螺旋變式課程設計的基石。下文介紹的螺旋變式課程設計亦是循着這些數學（與數學學習）的本質加以發展的。

圖六：兩位加法——從實物到符號

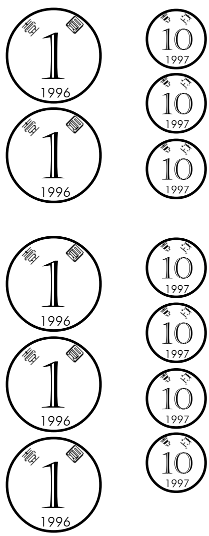
$$\begin{array}{rcc} & 3 & 6 \\ & 3 & 1 \\ + & 2 & {}_{1}9 \\ \hline & & \\ \hline \end{array}$$



資料來源：黃毅英（2002a，頁 303）。

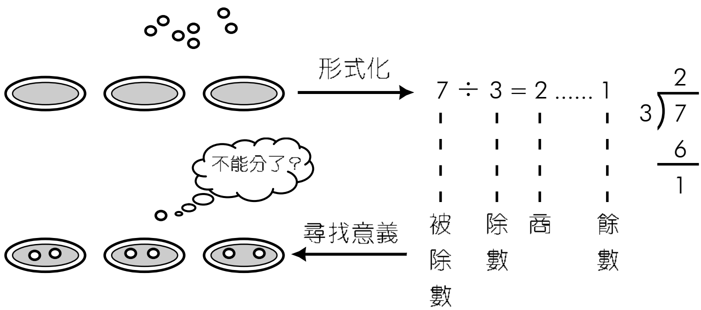
圖七：買賣遊戲——從實物到符號

$$\begin{array}{rcc} & 元 & 角 \\ & 2 & 3 \\ + & 3 & 4 \\ \hline & 5 & 7 \end{array}$$



資料來源：黃毅英（2002a，頁 303）。

圖八：除法的數學化



資料來源：顧泠沅等（2003）。

數學學習與數學教育的雙重本質

在上文「香港中小學數學課程的發展」一節內，筆者已提到數學課程上「p 和 p」的問題，以及香港在數學課程上的定位（見圖一）。事實上，香港課程發展議會及香港考試局數學課程檢討聯席會議的工作小組在 1994 年已提出數學的雙重本質，並提出：

> 數學教育之目標在於讓學生浸淫於如下一個數學學習環境——
>
> 一、在其中能養成積極和有效的學習習慣，使得其能閱讀及懂得如何提取知識；能清楚地寫及講以求表達其意念及與人溝通；能思考、提問、質疑及進行探索。
>
> 二、能獲得一手之數學經驗以認識數學既為準確科學亦為具想象力的工作，既為抽象的智性追求亦為具有實際生活應用之具體學科的雙重本質；以達致數學之美，其意義所在、其力量與局限性。（引自黃毅英， 1997 ，頁 159）

而在更早前的《數學科學習目標》中（香港課程發展議會， 1992），亦與中、英兩科有所不同地特別加插了「數學學習的性質」一節，其中標明：

> 學生學習數學科，是學習用以建立數學知識的特有計算及思考方法，並學習如何在不同情況下鑑別、應用及傳遞數學的知識（即學生是學習數學的認知學習過**程技巧**）。同時，學生亦學習有關數學的知識、概念、通則、標準模式和步驟，以及理念的關係（即學生是學習數學的**內容或成果**）。……課程發展議會工作小組決定將認知學習過程及內容納入數學學習目標的架構中，這個學習目標架構正好與其他國家所編訂的架構相符。（頁 10 ，粗體乃後加）

這除引申了今天數學課程的定位（見圖一），亦是以下所介紹螺旋變式課程設計的一個基本想法。筆者不只希望搭建由基本功到高層次思維之路，而由於數學的雙重本質，筆者更相信「過程」與「能力」的概念與運算法則是不可分割的，是銅幣的兩面。筆者並不認為操作性技巧屬於次要，因為它是概念形成中不可分割的部分。

在正式介紹螺旋變式課程設計之前，還有一點筆者想提出的，就是各種變式往往以「變式題」的形式出現。然而，筆者並不是鼓吹「題海戰術」。雖然數學學習的方式與介體十分多樣，但「問題」無疑是數學及數學學習的一個重心。Hilbert在著名的1900國際數學家議會的講話中指出：「只要一個科學的分支能提供大量的問題，它便活着」（Hilbert, 1902, p. 437）。 Halmos 亦說近幾十年來，數學學習的問題得到了很好的關注，例如「問題是數學的中心」（Halmos, 1980, p. 519）和「數學課程的中心」（Halmos, 1980, p. 524）。而美國全國數學督導員議會（National Council of Supervisors of Mathematics）在 1977 年發表的《基本數學技巧立場書》，一開始就提出「解決學習問題是研習數學的主

要目的」（National Council of Supervisors of Mathematics, 1978, p. 147）。尤其是在華人的課堂中，學生透過數學題認識數學和學習數學，教師也往往透過數學問題來佈置課堂教學。故此數學問題構成學生「經驗空間」的主要部分（Wong, Lam, & Chan, 2002）。

不過，在螺旋變式課程設計中，變式題不局限於「練習題」，亦可用堂課、學生活動、學生探索、學生擬題、學生討論及口頭報告等形式呈現，課程設計中也可以包括遊戲等。

小 結

數學發展為數學教育給予了這樣的啓示：數學學習是一個由具體到抽象、由歸納到演繹的過程。數學思維具有「概念」與「技巧」的雙重本質，但把兩者聯繫起來亦正是數學教學設計要注意之處。而筆者希望透過變式問題的引入，讓學生透過問題的變化循序漸進地把兩者連結，從而搭建由基本功到高層次思維能力的腳手架。

螺旋變式課程設計

如前所述，無論西方 Marton 等學者或內地顧泠沅等均對「由變化促進學習」和「由變突顯概念之不變」做了不少研究和實踐工作。這些先導性工作表明這是細緻地設計變式課程的時候。這正是筆者提出「螺旋變式課程」的用意。然而，如前所述，由於「具體」與「抽象」有其相對性，下面以「具體」和「抽象」來界定的不同變式亦只是課程設計的一些工具。筆者並不排除這些變式可能有少許重疊。筆者追溯整個構想的目的，就是要設計一個有目的、有秩序、有系統的變，這是先前一些先導性研究（如上述「透過有系統地引入變異促進學生數學問題解決能力」的研究）所未能完全做到的。透過這種有系統的變，學習就有了腳手架。學習者就可依之拾級而上。

筆者欲再說明，首先，這個課程設計並不是一種新「教學法」，亦不是以「問題組」取代整個教學過程（雖然在設計上各種變式往往以「問題組」呈現）。教師是按照這種細緻的腳手架佈置慣常的教學活動。是遊戲就是遊戲、發問就是發問。此外，這畢竟是一個課程設計，它和許多課程設計一樣，還需要教師以其專業知識，按照學生和各種實際情況調節，因時制宜，靈活調動。

如上所述，筆者所尋找的是一道學生可由基本功拾級而上，到達高層次思維能力的階梯。在某種程度上，個體形成數學概念的路程是數學歷史發展的縮影（Siu & Siu, 1979）。而由具體到抽象、歸納到演繹這樣的發展歷程正正能對「預計學習軌跡」（hypothetical learning trajectory）（Masters & Forster, 1996; Simon, 1995）提供啓示，作爲螺旋變式課程設計的基石。

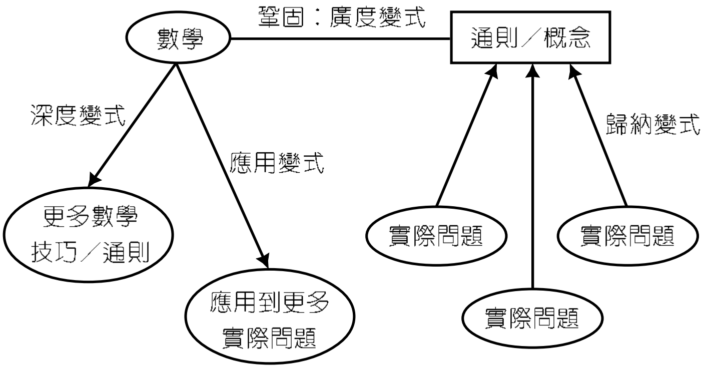
四種基本變式

在學習之初，教師可能須設計不同的學習情境，透過現實情境的變，引導學生歸納出通則、概念或技巧（變中的不變）。筆者稱這些情境的變爲「歸納變式」，其目的是形成概念或通則，甚至包括「拆除腳手架」，讓學生從現實情境提升到抽象層面。

在通則或概念形成之後，學生需要熟習。教師透過數學題有系統的變，以鞏固其中涉及的技巧或將數學變更（由個位數變爲多位數、小數、分數、大數等），或改變呈現的形式等，當中只涉及數學題形式上的變，不涉及新的技巧。筆者稱之爲「廣度變式」。

鞏固過後，筆者透過數學題形式或內容的變，推出更多的數學技巧。例如由整數除法推到分數除整數、分數除分數

圖九：螺旋變式課程的基本框架



等。雖然均只涉及單一的除法概念，但不論對除法的理解和技巧都不同了。這就涉及「深度變式」。

最後，筆者把學得的技巧、通則等，應用到更多的情境中，這種情境（所謂「應用題」）的變稱之爲「應用變式」（見圖九）。

具體而言，歸納變式是透過眾多現實情境的變化歸納出不變的數學概念和技巧；廣度變式是按照既定的數學技巧，變化數學題的（外部）形式，形成變式題組而得到技巧的鞏固；深度變式以既定的概念和技巧出發，透過問題的（內部）形式的變，遷移到相類概念和技巧；而應用變式是透過現實情境的變，把既定的概念與技巧應用到不同的情境中。這四種變式便是形成螺旋變式課程的主要元素。

這種課程設計模式雖然與學習數學的一般進程一致，但特別強調利用「變」去帶出「不變」，用這個手法形成數學概念和通則；又把已建立的概念和通則應用到更多變的處境中。圖十和下文的示例將進一步闡釋這四種基本變式。

圖十：四種變式的操作定義和示例

操作定義 — **數學目的**

- 四種基本變式
  - 歸納變式：由眾多情境歸納出通則／概念／技巧
    - 概念形成與抽象化〔例 I〕
    - 從不同表徵抽象出概念〔例 II〕
    - 通則形成〔例 III〕
    - 速率概念形成〔例 IV〕
    - 體積可加性概念形成〔例 V〕
    - 決定體積的因素〔例 VI〕
  - 廣度變式：某概念已形成，在固定的概念／通則／技巧內（不涉及新的概念形成）作出數學處境的變化
    - 技巧之純熟〔例 VII〕
    - 將不同概念組成概念結構〔例 VIII 、 IX〕
    - 把體積計算延伸到不同的立體〔例 X〕
  - 深度變式：某概念已形成，透過把技巧擴展到相近的數型，形成新的技巧／概念
    - 概念形成〔例 XI〕
    - 總邊長與體積的關係，周界與面積的關係〔例 XII 、 XIII〕
  - 應用變式：按通則應用到更多情境
    - 數學概念的應用〔例 XIV〕
    - 應用到不同情境〔例 XV〕
    - 百分數題型變化〔例 XVI〕

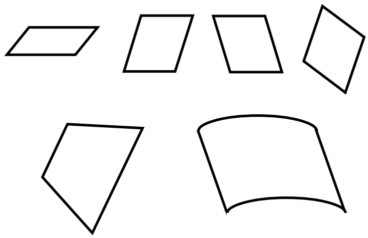
典型例子

歸納變式

例 I.　概念形成與抽象化

從例子

及非例子



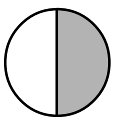
（變）

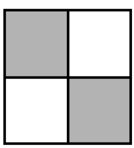
抽取平行四邊形的概念

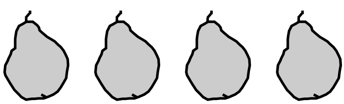
（不變）

例 II.　從不同表徵抽象出概念 $1 \div 2$

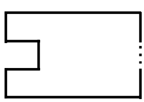
6 個餅分給 12 人







：2 人分 4 梨



兩人分租鋪位，如何平分？

（處境的變）

→ 得出 $\frac{1}{2}$ 的概念

（不變）

例 III.　通則形成

從　小明的歲數是小貞的 2 倍
大華的高度是小何的 1.5 倍
小薇的零用錢只有小珠零用錢的 $\frac{2}{3}$……　（變）

概括出

某甲的甚麼是某乙甚麼的 P 倍的算式表達是

$$甲 = 乙 \times P$$

這通則　（不變）

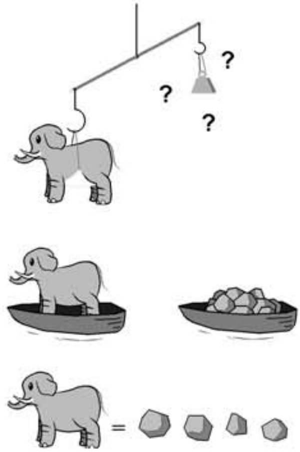
例 IV.　速率概念形成

透過吃飽率、出生率、媽媽包餃子的率、登入網頁率、姊姊編織手套率、甚至「大胃王」小林尊吃羊肉的率等各種的率（「變」）歸納出「率」的概念（「不變」），從而引入速率。[5]

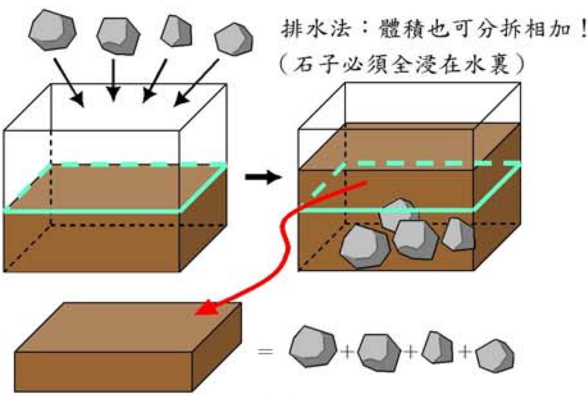
例 V. 體積可加性概念形成

利用伊索寓言中的烏鴉飲水（a），讓學生看到石塊佔有體積並導致水位上升；又利用曹聰秤象的故事帶出重量可相加（b），再利用排水法看到體積之可加性（c），利用這個可加性就可算出不同的體積（d）。

（a）

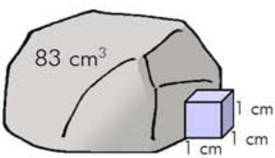


（b）



（c）

（d）

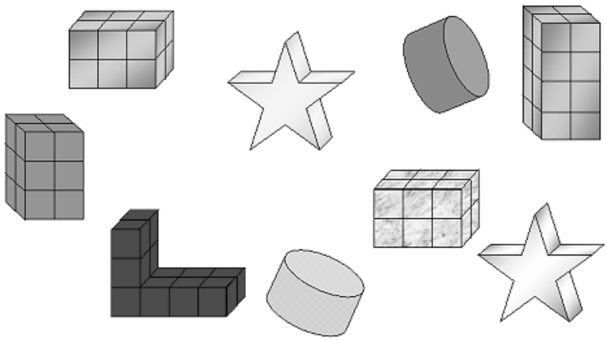


總體積 ＝？

例 VI.　決定體積的因素

從分析各種物料、形狀、顏色等容器（「變」）歸納出體積的決定因素（「不變」）。

看看下面的物件，把體積相同的分別
用相同顏色的筆圈出來。



廣度變式

例 VII.　技巧之純熟

學生已學會無餘數、商為整數之整數除整數，利用有系統的變式題讓他們熟習該技巧。

8 ÷ 2 、126 ÷ 3 、162 ÷ 3 、104 ÷ 4（涉及 0）、

$$\begin{array}{r} 42 \\ 3\overline{)126} \\ \underline{12} \\ 06 \\ \underline{6} \end{array} \qquad \begin{array}{r} 54 \\ 3\overline{)162} \\ \underline{15} \\ 12 \\ \underline{12} \end{array} \qquad \begin{array}{r} 26 \\ 4\overline{)104} \\ \underline{8} \\ 24 \\ \underline{24} \end{array}$$

1620 ÷ 30 、288 ÷ 12 、36 元 ÷ 6 、480 元分給 5 人

例VIII.　將不同概念組成概念結構

甲是乙的 p 倍。

（a）若 $p = 3$，而若乙是 7，甲 $= 3 \times 7$；若甲是 6，乙是 $3 \div 6$

（b）若已知甲、乙分別爲 9 和 5，則 p 是 $\frac{9}{5}$（除是乘的逆）

例IX.　將不同概念組成概念結構

已經學會了：

速度 ＝ 距離 ÷ 時間

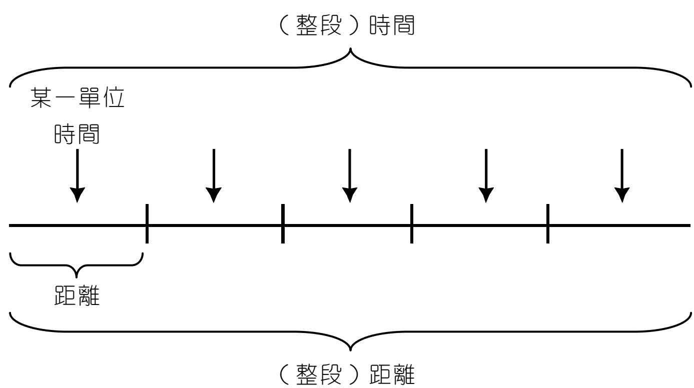
透過變式題及圖解得出：

距離 ＝ 速度 × 時間

再利用「還原」的想法導出：

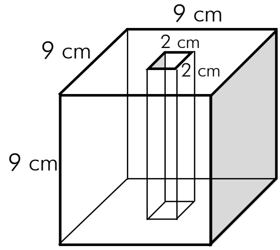
時間 ＝ 距離 ÷ 速度

速率是指物體運動時在某一單位時間內所經過的距離。

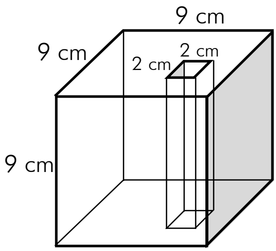


例 X. 把體積計算延伸到不同的立體

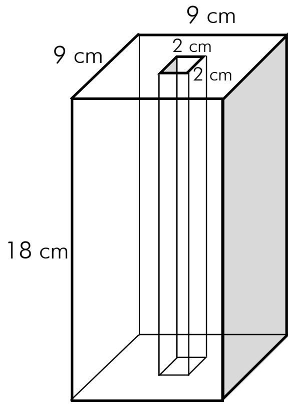
源題：在一個邊長是 9 厘米的正方體上面打一個孔，並打穿到對面。這個孔的底是邊長爲 2 厘米的正方形。現在這個立體的體積是多少立方厘米？



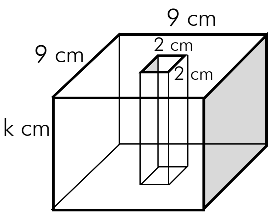
變式題：



（a）



（b）



（c）

透過這些變式題可進一步引領學生總結（a）、（b）、（c）的體積雖不相等（「變」），打了洞的體積與原來長方體體積的比卻不變。再進一步看到體積不只等於長 × 闊 × 高，同時等於底面積 × 高。

例 XI.　概念形成

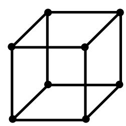
區分「整數」的除法意義的變式題組（把一個量分成若干等份，求其中的 1 份的運算時，是除法）：

變式題 1：媽媽買來 2 個蘋果，並把它們分給 2 個人，每人可分多少個？
變式題 2：媽媽買來 4 個蘋果，2 個人分，每人可分多少個？
變式題 3：媽媽買來 6 個蘋果，2 個人分，每人可分多少個？

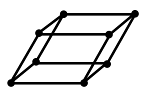
例 XII.　總邊長與體積的關係

從物體結構的變帶出物體的總邊長不能決定其體積。

這是邊長 1 米的木條支架。木條總長是 12 米，體積是 1 立方米。



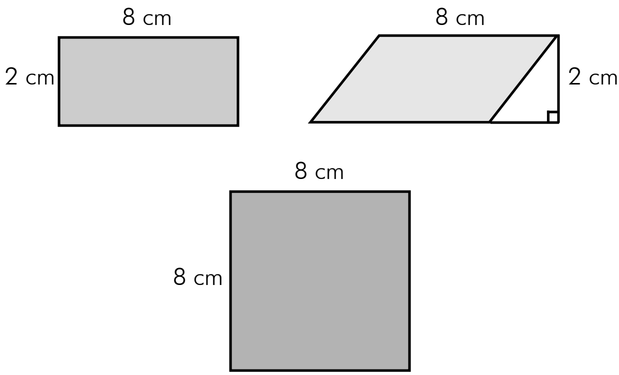
如果把框架壓扁，它的體積、面積和木條的總長度分別起了甚麼變化？



例 XIII.　周界與面積的關係

從圖形結構的變得出同一面積的四邊形可以有不同周界。

面積、周界：哪些相同？哪些不相同？



三角形又如何？能找出兩個面積相同、周界不同的三角形嗎？

應用變式

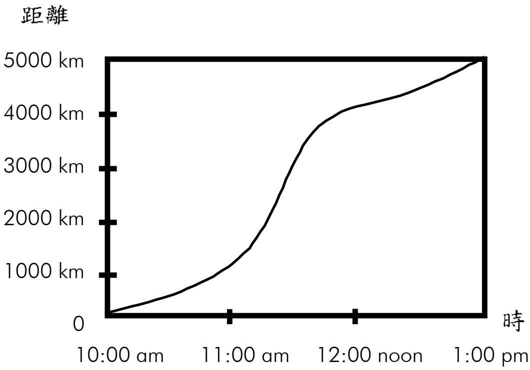
例 XIV.　數學概念的應用

學生學會了計算「甲是乙的 p 倍，知道甲，求乙」的相關技巧，把這個通則應用到更複雜的情境，例如：

・涉及百分數、單利息、折扣等等，
・甚至可能甲是乙的 p 倍、乙是丙的 q 倍等情境。

例 XV. 應用到不同情境

學生學會了速率，應用到更多的情境，例如行程圖：



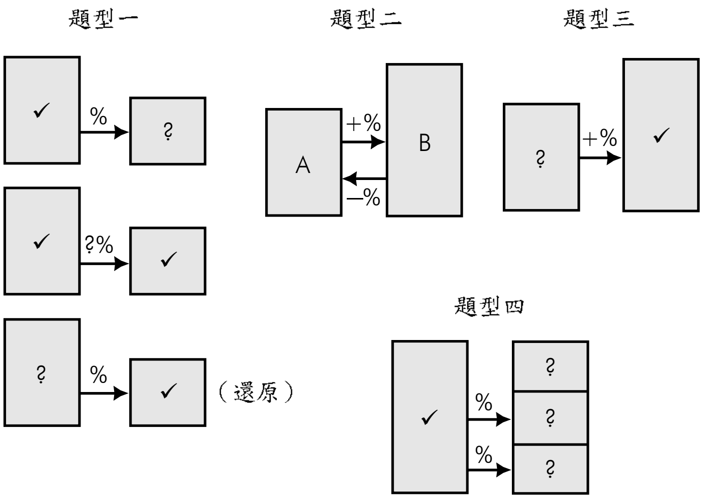
張革回家路程 1,000m ，用了 20 分鐘，求平均速度

距離	時間	速度
3m	30s	?

距離	出發時間	抵達時間	速度
4km	11:00am	2:00pm	?

例 XVI.　百分數題型變化

　　從百分數的認識出發，引入題型的變應用到不同的處境中，包括以下的題型。



歸納變式、廣度變式、深度變式及應用變式便是這個課程設計的重要元素，然而教育工作者不是爲了變而變（所謂變式泛化，見鄭毓信，2006），不一定爲了「完整性」而一定把這四種變式完完全全地嵌入課程設計內，而應細緻分析每一課題最自然、最合乎數學本質和數學學習的進路，看哪些點呈現「落差」，就透過有系統和適當的變式爲學生設計適當的腳手架。

概念與技巧的接合

在設計中間，教育工作者更充分考慮數學的「雙重本質」。雖然早期有把變式分成過程性變式和概念性變式，但從上可見，「概念」和「技巧」（或演算法）是一個銅幣的兩面。Sfard（1991）一針見血地指出兩者的關係：他按照數學的本質及心理學的考察，並借助了數學的發展過程，更細緻地提出，其實教師應從數學概念的運作層面入手，方可有效理解某個概念的結構關係。換言之，數學的概念本身包含了它的內部結構及運作法則，學習者不能、亦不應乾巴巴地先去認識前者，而應反過來先了解這些數學物體的運作。他更舉出數字等一系列例子：我們認識數字，是先從數數、順數、逆數、相加等運作，然後再慢慢地抽象出它運作的法則，以及概念的內部結構、與其他概念的關係。

Sfard（1991）更區分出運作性概念（operational concept）及結構性概念（structural concept），而概念的形成當然不會割裂地從一個到另一個，而是一個反覆循環的過程。然而這個過程應從運作開始。他更詳述了「內化（interiorisation）→ 沉澱（condensation）→ 具體化（reification）」的過程，其中涉及本體上的轉移（ontological shift）。Sfard 更用了不同的數學概念作例子說明。以負數爲例，學生從自然數的減法中引申了「負

數」的概念。在「內化」的階段，學生開始揮灑自如地進行減法；在「沉澱」階段，學生能以負數進行各種四則運算，其純熟程度就如處理正數一樣；而「具體化」階段實則是高一層次的開端，在負數而言，學生開始對負數這個總集（作爲一個「環」——然而學生無須知道「環」的正規定義）有整體的了解。總的來說，人對數學概念的認識與這些概念的運作層面是不可分開的。

簡言之，學生需要由概念（Sfard 所說的結構性概念）出發，而最終做到概念與操作互通的情況。在一般情況下，學生可以不必進行概念性分析就能進行問題解決，就如運算 $\frac{1}{3}+\frac{1}{4}$ 就一般只會操作性地進行「通分母」。這就是 Kerkman & Siegler（1997）所說的快速策略（fastest strategy）。在概念與操作的兩條軌道中，在螺旋變式課程設計中，教師容許一個階段的過渡。以分數除法爲例，一些教材很快便歸納到「除 = 乘的顛倒」，學生用這通則解決問題，雖然無往而不利，但概念理解不夠牢固。另一些教材則頗長時間停留在畫圖，但正如伍鴻熙（2000）所說，「我們可以畫很多圖來解釋，但對除法來說，無論怎樣去解釋，歸根究底都是對上述議程求解；所以倒不如老老實實地用這個方法來定義」（頁 30）。教師採取的做法不只是「中間落墨」，而是在早期已帶出運算法則，但一直把概念理解（包括圖解）和運算互相對照，到運算純熟了，才正式過渡到純運算操作的軌道。

最後，筆者必須不厭其煩地強調，學習的過程萬別千差，因人而異。教之難在於因人施教，因時制宜。縱只就進度而言，教師欲設計一道階梯讓學生拾級而上，這除了關於「速度」及每步的自我審定再上下一步外，「步寬」亦是一個需要注意的因素，太闊太難令人生怕，太窄太易又令人煩厭，這是至爲明顯的。

小 結

數學學習如數學的發展，由具體到抽象，又能應用回實際的處境。學生進入數學的層面，又可透過演繹推展到更多的數學。「螺旋變式課程」設計就是本着這個「數學化」的理念，讓學生無論在學習數學上和應用於不同的處境上（所謂「應用題」），都能得心應手。

註 釋

1. 1982 年英國發表了極具影響力的報告書，名爲《數學算數》（*Mathematics Counts*）
2. 20 世紀 70 年代小學數學配合活動教學而推行，有關方面提出「沒有眼淚的教學」，教育電視並於 1975 年製作同名電視節目。
3. 一般包括兩岸三地、日本、韓國、新加坡等地區。Confucian Heritage Culture 又譯作「儒家文化圈」，以別於亞洲的佛教地區，但當中現象與儒家思想是否有直接關係仍有存疑。爲方便起見，本文全用「華人地區」一詞。
4. 其中（a，b）~（c，d），當 ad = bc 。
5. 得陳美恩老師提供資料，謹此鳴謝。

參考文獻

伍鴻熙（2000）。《小學數學教育研究工作坊（一九九九年一月十三日至十五日）》。香港：香港科技大學教育發展組。

李子建（編著）（2002）。《課程、教學與學校改革：新世紀的教育發展》。香港：中文大學出版社。

沈占立（2001）。〈一道課本題與一串變式試題〉。《中學教與學》。第 10 期，頁 9 。

祁永華、謝錫金、岑紹基（編）（2005）。《變異理論與學習空間》。香港：香港大學出版社。

青浦縣數學教改實驗小組（1991）。《學會教學》。北京：人民教育出版社。

香港教育統籌委員會（2001）。《學會學習：終身學習、全人發展》。香港：教育統籌委員會。

香港課程發展委員會（編）（1985）。《數學科課程綱要（中一至中五適用）》。香港：政府印務局。

香港課程發展議會（編訂）（1992）。《數學科學習目標（小一至中五）》。香港：政府印務局。

香港課程發展議會全面檢討數學課程專責委員會（2000）。《數學課程全面檢討報告》。香港：香港教育署。

孫旭花、黃毅英（2005）。〈變式題的問題解決過程理論建構〉。載文耀光、史創立、潘建強（編），《數學教育研究及教學最新進展——數學教育會議2005文集》（頁173–182）。香港：香港數學教育學會。

莫禮時（著），陳嘉琪、溫霈國（譯）（1996）。《香港學校課程的探討》。香港：香港大學出版社。

曾慶豐（2004）。〈變式探究創新〉。《中學數學》，第1期，頁18–20。

黃家鳴（1997）。〈生活情境中的數學與學校的數學學習〉。《基礎教育學報》，第7卷第1期，頁161–167。

黃家鳴（1998）。〈數學文字題及課業的處境應該有多真實？〉。《數學教育》，第7期，頁44–54。

黃家鳴（2000）。〈現實情境作爲數學學習的起點：荷蘭經驗〉。《數學教育》，第11期，頁34–46。

黃毅英（1990）。〈解題與數學教育〉。《數學傳播》，第54期，頁71–81。

黃毅英（1995）。〈普及教育期與後普及教育期的香港數學教育〉。載蕭文強（編），《香港數學教育的回顧與前瞻》（頁69–87）。香港：香港大學出版社。

黃毅英（1997）。〈香港數學教育改革另類報告〉。載馮振業（編），《香港數學課程改革之路》（頁141–160）。香港：香港數學教育學會。

黃毅英（2002a）。〈數學學習——由生活到數學化的道路〉。載黃顯華、朱嘉穎（編），《一個都不能少：個別差異的處理》（頁299–306）。台北，台灣：師大書苑。
黃毅英（2002b）。《數學教育實地考察II——無無謂謂聽書記》。香港：香港數學教育學會。
黃毅英（2002c）。〈解讀《學會學習》〉。載蔡寶瓊、黃家鳴（編），《姨媽姑爹論盡教改》（頁188–200）。香港：進一步多媒體。
黃毅英（2003a）。〈「建構主義教學」：慎防重蹈「新數學運動」的覆轍〉。《數學教學》，第3期，頁4–5。
黃毅英（2003b）。〈從認識論的課程分析看現行中小學課程的幾個問題〉。載鄧幹明、曾倫尊（編），《學會學習：數學課程改革評析》（頁3–24）。香港：香港數學教育學會。
黃毅英（2004a）。〈香港數學教育論題芻議——第三份「另類報告」後篇〉。《數學教育》，第19期，頁22–33。
黃毅英（2004b）。〈從各地數學課程改革看數學教育面對的幾個問題〉。載裴娣娜（主編），《兩岸四地中、小學數學課程與教學改革學術論壇：數學教育與學生發展論文集》（頁31–36）。澳門：教育暨青年局。
黃毅英（2004c）。〈第三份香港數學教育另類報告——天翻地覆教改話滄桑〉。載鄧幹明、黃家樂、李文生、莫雅慈（編），《香港數學教育研討會——2004論文集》（頁8–29）。香港：香港大學教育學院，香港數學教育學會。
黃毅英（2005a）。〈自然數的歷史〉。《朗文教育專訊》，第8期，頁6–9。
黃毅英（2005b）。〈從香港「以兒童爲中心」小學數學課程改革談起：尋找從「基礎」通到「高層次思維能力」之路基於學生發展的數學教學探索〉。載天津師範大學教育科學學院（編），《兩岸四地數學課程

與教學第二屆學術研討會論文集：基於學生發展的數學教學探索》(頁32–35)。天津：天津師範大學教育科學學院。

黃毅英（2005c）。〈通識教育：一個遙不可及的夢——這究竟是否我們的夢？〉。《教師中心傳真》，第55期，頁6–7。

黃毅英、黃家樂（2001）。〈「新數學」運動的過程及對當代數學教育之啓示〉。載黃毅英(編)，《香港近半世紀漫漫「數教路」：從「新數學」談起》(頁9–111)。香港：香港數學教育學會。

劉建軍（2001）。〈應用題變式練習設計方法初探〉。《小學教學參考》，第10期，頁7–10。

歐用生（2000）。《課程改革》。台北，台灣：師大書苑。

鄭毓信（2006）。〈變式理論的必要發展〉。《中學數學月刊》，第1期，頁1–3。

鄭肇楨（1984）。《心理學》。香港：商務印書館。

鄧國俊、黃毅英、霍秉坤、顏明仁、黃家樂（2006）。《香港近半世紀漫漫「小學數教路」：現代化、本土化、普及化、規範化與專業化》。香港：香港數學教育學會。

蕭文強（1978）。《為甚麼要學習數學》。香港：學生時代出版社。

鮑建生、黃榮金、易凌峰、顧泠沅（2003a）。〈變式教學研究〉。《數學教學》，第1期，頁11–12。

鮑建生、黃榮金、易凌峰、顧泠沅（2003b）。〈變式教學研究（續）〉。《數學教學》，第2期，頁6–10。

鮑建生、黃榮金、易凌峰、顧泠沅（2003c）。〈變式教學研究（再續）〉。《數學教學》，第3期，頁6–12。

戴啓猛（2002）。〈變式深化——潮起潮湧〉。《廣西教育》，第20期，頁39–40。

聶必凱（2004）。《數學變式教學是探索性研究》。未發表之博士論文，華東師範大學，中國上海。

譚淵（2004）。〈談中學數學習題變式的教學〉。2005年7月24日擷取自於中國校聯網頁：http://www.scln.cn/main/search.asp?Id=21908&__LEADER=ViewPage

顧泠沅（1981，12月）。〈演變圖形在幾何教學中的直觀效果和心理意義〉。文章發表於「上海市數學會首屆年會」，上海市，中國。

顧泠沅（1994）。《教學實驗論——青浦實驗的方法與教學原理研究》。北京：教育科學出版社。

顧泠沅、易凌鋒、聶必凱（編）（2003）。《尋找中間地帶——國際數學教育改革的大趨勢》。上海：上海教育出版社。

Ausubel, D. P. (1961). In defense of verbal learning. *Educational Theory, XI*, 15–25.

Ausubel, D. P. (1963). *The psychology of meaningful verbal learning*. New York: Grune & Stratton.

Ausubel, D. P. (1968a). *Educational psychology: A cognitive view*. New York: Holt, Rinehart & Winston.

Ausubel, D. P. (1968b). Facilitating meaningful verbal learning in the classroom. *The Arithmetic Teacher*, *15*, 126–132.

Bell, F. H. (1978). *Teaching and learning mathematics (in secondary schools)*. Dubuque, IA: W. C. Brown.

Biggs, J. B. (Ed.). (1991). *Teaching for learning: The view from cognitive psychology*. Hawthorn, Victoria: Australian Council for Educational Research.

Biggs, J. B., & Moore, P. J. (1993). *The process of learning*. New York: Prentice Hall.

Bowden, J., & Marton, F. (1998). *The University of learning*. London: Kogan Page.

Bruner, J. (1985). Vygotsky: A historical and conceptual perspective. In J. V. Wertsch (Ed.), *Culture, communication, and cognition: Vygotskian perspectives* (pp. 21–34). Cambridge: Cambridge University Press.

Clark, J. L., Scarino, A., & Brownell, J. A. (1994). *Improving the quality of learning: A framework for Target-oriented Curriculum renewal in Hong Kong*. Hong Kong: Hongkong Bank Language Development Fund; Institute of Language in Education.

Cooper, B., & Dunne, M. (1998). Anyone for tennis? Social class differences in children's responses to National Curriculum Mathematics Testing. *The Sociological Review*, *46*(1), 115–148.

Cronbach, I. F. (1955). The meaning of problems. In J. M. Seidman (Ed), *Readings in educational psychology* (pp. 193–201). Boston: Houghton Mifflin.

Delors, J. (1998). *Learning: The treasure within*. Paris: UNESCO.

Esteve, J. M. (2000). The transformation of the teachers' role at the end of the twentieth century: New challenges for the future. *Educational Review*, *52*(2), 197–207.

Freudenthal, H. (1991). *Revisiting mathematics education: China lectures*. Dordrecht, the Netherland: Kluwer Academic Publishers.

Gardner, H. (1989). *To open minds: Chinese clues to the dilemma of contemporary education*. New York: Basic Books.

Gredler, M. E. (2001). *Learning and instruction: Theory into practice* (4th ed.). Upper Saddle River, NJ: Merrill Prentice Hall.

Gu, L. (1992, August). *The Qingpu experience*. Paper presented at the 7th International Congress of Mathematics Education, Quebec, Canada.

Gu, L. (2000, July–August). *Exploring the middle zone*. Paper presented at the 9th International Congress of Mathematics Education (Gathering of Chinese scholars), Tokyo/Makuhari, Japan.

Gu, L., Marton, F., & Huang, R. (2004). Teaching with variation: A Chinese way of promoting effective mathematics learning. In L. Fan, N. Y. Wong, J. Cai, & S. Li (Eds.), *How Chinese learn mathematics: Perspectives from insiders* (pp. 309–347). Singapore: World Scientific.

Halmos, P. (1980). The heart of mathematics. *American Mathematical Monthly, 87*(7), 519–524.

Hatano, G., & Inagaki, K. (1998). Cultural contexts of schooling revisited: A review of the learning gap from a cultural psychology perspective. In S. G. Paris & H. M. Wellman (Eds.), *Global prospects for education: Development, culture, and schooling* (pp. 79–104). Washington, DC: American Psychological Association.

Heddens, J. W. (1994, August). *Using manipulatives in primary school teacher preparation*. Paper presented at Workgroup on primary school teacher preparation, ICMI-China Regional Conference on Mathematics Education, Shanghai, China.

Helmstad, G., & Marton, F. (1991, August). *Conceptions of understanding*. Paper presented at the Fourth European Conference for Research on Learning and Instruction, Turku, Finland.

Hilbert, D. (1902). Mathematical problems: Lecture delivered before the International Congress of Mathematicians at Paris in 1900 (N. W. Newson, Trans). *Bulletin of the American Mathematical Society*, *8*, 437–479.

Howson, G., & Wilson, B. (Eds.). (1986). *School mathematics in the 1990s*. Cambridge: Cambridge University Press.

Huang, R. J. (2002). *Mathematics teaching in Hong Kong and Shanghai: A classroom analysis from the perspective of variation*. Unpublished doctoral dissertation, The University of Hong Kong, Hong Kong.

Inagaki, K., Hatano, G., & Morita, E. (1998). Construction of mathematical knowledge through whole-class discussion. *Learning and Instruction, 8*(6), 503–526.

Kerkman, D. D., & Siegler, R. S. (1997). Measuring individual differences in children’s addition strategy choices. *Learning and Individual Differences, 9*(1), 1–18.

Leung, F. K. S. (2004). The implications of the third international mathematics and science study for mathematics curriculum reforms in Chinese communities. In D. N. Pei (Ed.),《兩岸四地中、小學數學課程與教學改革學術論壇論文集：數學教育與學生發展》(Proceedings of the academic forum on the curriculum and teaching reforms in primary and secondary mathematics among the four regions across the strait: Mathematics education and student development) (pp. 122–138). Macau: Education and Youth Affairs Bureau.

Marton, F., & Booth, S. (1997). *Learning and awareness*. Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Marton, F., Dall’Alba, G., & Beaty, E. (1993). Conceptions of learning. *International Journal of Educational Research, 19*(3), 277–300.

Marton, F., Runesson, U., & Tsui, A. B. M. (2003). The space of learning. In F. Marton & A. B. M. Tsui (with P. Chik, P. Y. Ko, M. L. Lo, I. A. C. Mok, D. Ng, M. F. Pang, W. Y. Pong, & U. Runesson) (Eds.), *Classroom discourse and the space of learning* (pp. 3–42). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Masters, G., & Forster, M. (1996). *Assessment resource kit: Progress maps*. Melbourne, Victoria: Australian Council for Educational Research.

Mathematical Association. (1955). *The teaching of mathematics in primary schools: A report prepared for the Mathematical*

Association for consideration by all concerned with the development of young children. London: G. Bell & Sons.

Mathematics Sciences Education Board. (1989). *Everybody counts: A report to the nation on the future of mathematics education*. Washington, DC: National Academy Press.

National Advisory Committee on Mathematics Education. (1975). *Overview and analysis of school mathematics, Grades K-12*. Washington, DC: Conference Board of the Mathematical Sciences.

National Council of Supervisors of Mathematics. (1978, February). Position statement on basic mathematics. *Mathematics Teacher*, 147–152.

National Council of Teachers of Mathematics. (1989). *Curriculum and evaluation standards for school mathematics*. Reston, VA: Author.

Organisation for Economic Co-operation and Development. (1996). *Lifelong learning for all*. Paris: Author.

Perry, B., Tracey, D., & Howard, P. (1998). Elementary school teacher beliefs about the learning and teaching of mathematics. In H. S. Park, Y. H. Choe, H. Shin, & S. H. Kim (Eds.), *Proceedings of the ICMI-East Asia regional conference on mathematical education* (Volume 2, pp. 485–497). Seoul, Korea: Korean Sub-Commission of ICMI; Korea Society of Mathematical Education; Korea National University of Education.

Pramling, I. (1983). *The child's conception of learning*. Göteborg, Sweden: Acta Universitatis Gothoburgensis.

Runesson, U. (1999). *Variationens pedagogik: Skilda sätt att behandla ett matematiskt innehåll* [in Swedish] (The pedagogy of variation: Different ways of handling a mathematical topic). Göteborg, Sweden: Acta Universitatis Gothoburgensis. English summary retrieved December 1, 1997 from: http://www.ped.gu.se/biorn/phgraph/civial/graphica/diss.su/runesson.html

Scandura, J. M. (1977). *Problem solving: A structural/process approach with instructional implications*. New York: Academic Press.

Sfard, A. (1991). On the dual nature of mathematical conceptions: Reflections on processes and objects as different sides of the same coin. *Educational Studies in Mathematics, 22*(1), 1–36.

Simon, M. A. (1995). Reconstructing mathematics pedagogy from a constructivist perspective. *Journal for Research in Mathematics Education*, *26*(2), 114–145.

Siu, F. K., & Siu, M. K. (1979). History of mathematics and its relation to mathematical education. *International Journal of Mathematics Education in Science and Technology*, *10*(4), 561–567.

Sun, X. H., Wong, N. Y., & Lam, C. C. (2005). Bianshi problem as the bridge from "entering the way" to "transcending the way": The cultural characteristic of Bianshi problem in Chinese math education. *Journal of the Korea Society of Mathematical Education Series D: Research in Mathematical Education*, *9*(2), 153–172.

Vygotsky, L. S. (1978). *Mind in society: The development of higher psychological processes*. Cambridge, MA: Harvard University Press.

Watkins, D. A., & Biggs, J. B. (Eds.). (2001). *Teaching the Chinese learner: Psychological and pedagogical perspectives*. Hong Kong: Comparative Education Research Centre, The University of Hong Kong.

Whitehead, A. N. (1949). The aims of education. In A. N. Whitehead, *The aims of education and other essays* (pp. 13–26). New York: The New American Library. (Original work published 1929)

Wong, N. Y. (1993). The psychosocial environment in the Hong Kong mathematics classroom. *Journal of Mathematical Behavior*, *12*(3), 303–309.

Wong, N. Y. (1996). Students' perceptions of their mathematics classroom in Hong Kong. *Hiroshima Journal of Mathematics Education*, *4*, 89–107.

Wong, N. Y. (1998). The gradual and sudden paths of Tibetan and Chan Buddhism: A pedagogical perspective. *Journal of Thought*, *33*(2), 9–23.

Wong, N. Y. (2004). The CHC learner's phenomenon: Its implications on mathematics education. In L. Fan, N. Y. Wong, J. Cai, & S. Li (Eds.), *How Chinese learn mathematics: Perspectives from insiders* (pp. 503–534). Singapore: World Scientific.

Wong, N. Y., Chiu, M. M., Wong, K. M., & Lam, C. C. (2005). The lived space of mathematics learning: An attempt for change. *Journal of the Korea Society of Mathematical Education Series D: Research in Mathematical Education*, *9*(1), 25–45.

Wong, N. Y., Han, J. W., & Lee, P. Y. (2004). The mathematics curriculum: Towards globalisation or Westernisation? In L. Fan, N. Y. Wong, J. Cai, & S. Li (Eds.), *How Chinese learn mathematics: Perspectives from insiders* (pp. 27–70). Singapore: World Scientific.

Wong, N. Y., Lam, C. C., & Chan, C. S. (2002). The current state of the "lived space" of Mathematics learning. *Hisroshima Journal of Mathematics Education*, *10*, 27–52.

Wong, N. Y., Lam, C. C., Wong, K. M., & Chiu, M. M. (2005, August). *Changing students' mathematics problem solving performance and conception of mathematics through the systematic introduction of variation*. Paper presented at the 3rd East Asia Regional Conference on Mathematical Education, Shanghai/Hangzhou, China.

Wong, N. Y., Lam, C. C., Wong, K. M. P., Leung, F. K. S., & Mok, I. A. C. (2001). Students' views of mathematics learning: A cross-sectional survey in Hong Kong. *Education Journal*, *29*(2), 37–59.

Wong, N. Y., Marton, F., Wong, K. M., & Lam, C. C. (2002). The lived space of mathematics learning. *Journal of Mathematical Behavior*, *21*(1), 25–47.

Wood, D., Bruner, J. S., & Ross, G. (1976). The role of tutoring in problem solving. *Journal of Child Psychology and Psychiatry*, *17*(2), 89–100.

Zhang, D., & Dai, Z. (2004, July). *"Two basics": Mathematics teaching approach and open ended problem solving in China*. Paper presented at the 10th International Congress of Mathematics Education, Copenhagen, Denmark.

The Basic Principles of Designing *Bianshi* Mathematics Teaching: A Possible Alternative to Mathematics Curriculum Reform in Hong Kong

WONG Ngai-ying , LAM Chi-chung, & SUN Xuhua

Abstract

At the turn of the new millennium, discussions on mathematics curriculum reform proliferate in many places. One of the foci of the debate is the basic skills–higher-order thinking "dichotomy." Viewing from the perspective of the process of mathematisation, teaching mathematics is more than striking a balance between the two, but to bridge basic skills to higher-order thinking competences. Based on the pedagogy of variation in educational psychology in the West and rich practical curriculum and instructional experience in the Chinese mainland, the principle of mathematics *bianshi* (variation) curriculum design is developed in accordance with the nature of mathematics and mathematics learning. The whole idea is presented in this paper.