包含度理论*

张文修　徐宗本　　　梁　怡　梁广锡
（西安交通大学，西安，710049）　　（香港中文大学）

摘要　不确定性是复杂系统的特征。在人工智能与专家系统中，不确定性的研究越来越具有重要意义。Zadeh[1]于1965年提出模糊集，把经典集合扩充到模糊集合，从而解决了“对象”的不确定性。本文引进了包含度的概念，解决了“关系”的不确定性。同时指出，包含度不仅是各种不确定性推理方法的概括，而且解决了知识获取与矛盾规则排除两个重要问题。

关键词　包含度；不确定性推理；知识获取。

§1. 引　言

在一个复杂系统中，有许多不确定性的来源。首先，人们提出的问题常常是不精确的，不精确的问题导致不精确的结果；第二，获取的信息不完全，知识获取的过程也是不精确的；第三，推理的过程也是不确定的，不确定性的推理过程导致不确定性的结论。随着人们研究范围的扩大，研究的系统越来越复杂，系统的复杂性与经典数学的精确描述越来越不协调。Zadeh[1]引入的模糊集合，将经典集合模糊化，使具有分明边界的集合变为具有不分明边界的模糊集合。模糊集合理论在复杂系统中得到了成功的应用，特别是在模糊控制中，取得了显著成果。包含度是将“包含关系”度量化，从而包容了“关系”的不确定性。

在经典包含关系中，要么“包含”，要么“不包含”，二者必居其一。这种极端的分界，将“关系”过于简化。比如“会飞的鸟”显然是“鸟”，因为“会飞的鸟”是“鸟”的一部分。但是“鸟”并不一定是“会飞的鸟”，按照传统的“包含关系”，我们就不能得到“鸟会飞”的结论，因为确实有某些种类的鸟是不会飞的鸟，这对人们思考问题是一个很大的限制。事实上有99%以上的鸟都会飞，也即“鸟”包含于“会飞的鸟”的包含度为0.99以上。正因为这样，人们可以冒着犯一小点错误的危险，到处使用“鸟会飞”的断语。

由于在复杂系统中，不确定性越来越占有主要地位，不确定性推理的研究方法不断出现，如概率推理方法[7]，证据推理方法[2]，模糊推理方法[8]等都属于不确定性推理方法。由于推理中的蕴含关系，实质上是一种包含关系，不确定性推理方法都可以归结为一种特殊的包含度。同时，知识获取是从大量案例中寻求某些规则，而规则的前件与后件实质上也是一种包含关系[6]，因此可以用包含度理论研究不确定性规则的获取。两个规则是谐调的，是指两个规则的前件的相似度不超过两个规则后件的相似度，因此可以用

* 本文1996年4月4日收到。

包含度建立两个规则之间的谐调度，解决矛盾规则的排除问题。包含度理论与模糊集理论一起，将“对象”与“关系”不确定化，成为研究不确定性的重要工具，提供了研究复杂系统的重要方法。

§2 包含度的概念

两个集合的包含度是指一个集合包含于另外一个集合的程度。

设 X 是一个论域，A 和 B 是 X 中的两个子集合，集合 A 包含于集合 B 的程度 $D(B/A)$ 称为包含度，如果它满足以下四条公理：

公理 1 $0\leqslant D(B/A)\leqslant 1$；

公理 2 $A\subset B$ 时，$D(B/A)=1$；

公理 3 $A\subset B\subset C$ 时，$D(A/C)\leqslant D(A/B)$；

公理 4 $A\subset B$ 时，对于任意 C 有 $D(A/C)\leqslant D(B/C)$。

公理 1 是对包含度的规范化，包含度在 $[0,1]$ 中取值。公理 2 表示包含度与经典包含的谐调性，经典包含关系是包含度为 1 的特殊情况。公理 3 与公理 4 是包含度的单调性。精略地说，一个较小的集合比较容易包含在一个较大的集合中。在使用包含度的公理中，有时可仅利用公理 3 或公理 4 之一即可。

例 1 设 X 是有限集合，$N(A)$ 表示 A 中元素个数，对于 $A,B\subset X$，记

$$D(B/A)=\frac{N(A\cap B)}{N(A)}$$

则 $D(B/A)$ 为 A 关于 B 的包含度。例如当 $A=\{x_1,\cdots,x_6\}$，$B=\{x_5,x_6,\cdots,x_{10}\}$，则 $D(B/A)=1/3$。

设 X 是一个论域，A 和 B 是 X 上的模糊集，若对于任意 $x\in X$，$A(x)\leqslant B(x)$，称 A 包含于 B，记作 $A\subset B$。这样包含度也可以定义在 X 的模糊集上，即有包含度 $D(B/A)$。对经典集合 $A\subset B$ 有 $D(B/A)=1$。但对于模糊集，$A\subset B$ 时 $D(B/A)=1$ 未必成立。

例 2 设 P 是 X 上的概率测度，模糊集 A 的模糊概率为

$$P(A)=\sum_{i=1}^{l}A(x_i)P(x_i)$$

于是

$$D(B/A)=P(A^c\cup B)$$

是包含度。对于经典集合 A 和 B，$A\subset B$ 时，$A^c\cup B=X$，于是 $D(B/A)=P((A^c\cup B))=P(X)=1$。对于模糊集 A 和 B，$A\subset B$ 时 $A^c\cup B\neq X$，于是未必有 $D(B/A)=1$。

由包含度的概念出发，我们可以在 $[0,1]$ 上定义“包含度”，它实质上是一种“小于度”。对于 $[0,1]$ 中两个数 a 和 b，称 $D(b/a)$ 为包含度，如果它满足以下公理：

公理 1 $0\leqslant D(b/a)\leqslant 1$；

公理 2 $a\leqslant b$ 时，$D(b/a)=1$；

公理 3 $a<b<c$ 时，$D(a/c)\leqslant D(a/b)$；

公理 4 $a<b$ 时，对于任意 c 有 $D(a/c)\leqslant D(b/c)$。

例 3 设 a，b 是 $[0,1]$ 中的两个数，则

$$D(b/a)=(1-a+b)\wedge 1$$

是包含度。

在[0,1]上定义的包含度，使不确定性带来的误差不会造成相反的结果。比如甲的真实高度为 1.73 米，乙的真实高度为 1.74 米，测量结果可能甲为 1.74 米，乙为 1.73 米，这样就会得到“甲比乙高”的相反结论。如果计算包含度有

$$D(1.73/1.74) = (1 - 1.74/2 + 1.73/2) \wedge 1 = 0.995$$

即“甲小于乙”的程度为 0.995。

不管是经典集合的包含关系，模糊集合的包含关系，还是[0,1]上的“≤”关系，都是一种半序关系。因此包含度可以定义在任何半序集上，将半序关系赋于一种度量。

§3　包含度理论与概率推理

包含度理论概括了已有的各种不确定性推理方法。

在不确定性推理中，最早出现的是概率推理，利用条件概率 $P(B/A)$ 进行推理，容易证明

$$D(B/A) = P(B/A)P(A \cap B)/P(A)$$

是一种包含度。由于在条件变量比较多的情况下，条件概率的数量大大增加，这在实际中是难于获得的，因此出现了概率推理的两种变形，一种是主观 Bayes 方法，一种是 MYCIN 不确定因子方法。主观 Bayes 方法是给出了条件成立时假设成立的强度 LS，和条件不成立假设成立的强度 LN，用两个规则强度计算条件概率[4]，由于

$$D_1(h/e) = P(\bar{e} \vee h) = P\{e = 0 \text{ 或 } h = 1\}$$

$$D_2(h/e) = P(\bar{e}/\bar{h}) = P(e = 0,\, h = 0)/P(h = 0)$$

也是包含度，则得到主观 Bayes 方法的另外两种新的方法。

定理 1　设 h 为假设，e 为证据，则

$$D_1(h/e) = 1 - \frac{(1 - LN)P(\bar{h})}{LS - LN} \tag{1}$$

$$D_1(h/\bar{e}) = 1 - \frac{(LS - 1)P(\bar{h})}{LS - LN} \tag{2}$$

证明　由主观 Bayes 方法，有

$$P(h/\bar{e}) = \frac{LS \cdot P(h)}{(LS - 1)P(h) + 1} \tag{3}$$

$$P(h/e) = \frac{LN \cdot P(h)}{(LN - 1)P(h) + 1} \tag{4}$$

利用全概率公式

$$P(h) = P(h/e)P(e) + P(h/\bar{e})P(\bar{e})$$

即得

$$P(e) = \frac{(1 - LN)[(LS - 1)P(h) + 1]}{(LS - LN)} \tag{5}$$

$$P(\bar{e}) = \frac{(LS - 1)[(LN - 1)P(h) + 1]}{(LS - LN)} \tag{6}$$

将(3)和(5)代入

$$D_1(h/e) = P(\bar{e} \vee h) = 1 - P(e \wedge \bar{h}) = 1 - (1 - P(h/e)) \cdot P(e)$$

即得(1)，(2)类似可证。

定理 2　设 h 为假设，e 为证据，则有

$$D_2(h/e) = (LS-1)/(LS-LN)$$

$$D_2(h/\bar{e}) = (1-LN)/(LS-LN)$$

证明　与定理1类似。

概率推理的另外一种方法是MYCIN不确定因子方法[3]。MYCIN不确定因子是利用给定条件下信任增加的程度

$$MB(h/e) = \begin{cases} \dfrac{P(h/e) \vee P(h) - P(h)}{1-P(h)}, & P(h) \neq 1 \\ 1, & P(h) = 1, \end{cases}$$

和怀疑增加的程度

$$MD(h/e) = \begin{cases} \dfrac{P(h) - P(h/e) \wedge P(h)}{P(h)}, & P(h) \neq 0 \\ 1, & P(h) = 0. \end{cases}$$

给出不确定因子：

$$CF(h/e) = MB(h/e) - MD(h/e).$$

但可以证明 $MB(h/e)$ 是包含度（不满足公理4），$1-MD(h/e)$ 是包含度（不满足公理4）。于是

$$D(h/e) = (MB(h/e) + 1 - MD(h/e))/2 = (CF(h/e) + 1)/2$$

是包含度。$CF(h/e)$ 是在 $[-1,1]$ 中取值，$D(h/e)$ 是将 $CF(h/e)$ 规范化，因此不确定因子实质上是一种包含度。

§4　包含度理论与模糊推理

设 T 是 $[0,1]$ 上的三角模，即满足交换律、结合律、单调性和 $T(a,1)=a\,(0\leqslant a\leqslant 1)$ 的二元函数，则

$$D(b/a) = a\alpha_T b = \sup\{c;\ T(a,c) \leqslant b\}$$

是 $[0,1]$ 上的包含度。于是在模糊推理中的蕴含关系即是包含度

$$R(x,y) = D(B(y)/A(x)) = A(x)\alpha_T B(y)$$

如果我们用 $R(x,y)=A(x)\wedge B(y)$ 作为蕴含关系，可以用包含度建立合成规则

$$(A \circ R)(y) = \sup_x D(R(x,y)/A(x)).$$

假定 Π 为可能度[4]，即满足

$$\Pi(A \cup B) = \Pi(A) \vee \Pi(B)$$

则

$$D_1(B/A) = \Pi(A^c \cup B)$$

$$D_2(B/A) = \sup\{t;\ \Pi(A \cap B) = T(t, \Pi(A))\}$$

是包含度。对于 D_2 来讲，若 $A\subset B$，则 $\Pi(A\cap B)=\Pi(A)$，由 $\Pi(A)=T(t,\Pi(A))$ 及三角模性质，知 $t=1$，于是 $A\subset B$ 时 $D_2(B/A)=1$。但是对于 D_1 来讲，仅对经典集合 $A\subset B$ 时，有 $D_1(B/A)=1$。如果 A 与 B 是正则模糊集[1]，则公理2对于 D_1 中取模糊集也成立。

同样，假定 N 是必然度[4]，即满足

$$N(A \cap B) = N(A) \wedge N(B)$$

则

$$N(B/A) = \inf_x (A^c(x) \vee B(x))$$

是包含度。但公理 2 也仅对经典集合成立。

定理 3　用 $\mathscr{F}^*(x)$ 表示 X 上是正则模糊集的全体，则

$$M(B/A) = \begin{cases} \Pi(B/A), & N(B/A) > 0.5 \\ (N(B/A) + 0.5) \cdot \Pi(B/A), & N(B/A) \leqslant 0.5 \end{cases}$$

是 $\mathscr{F}^*(X)$ 上的包含度。

证明　公理 1,2,4 易证。只需证公理 3 成立。现设 $A \subseteq B \subset C$，则有

$$\Pi(A/C) = \Pi(A/B) = 1$$

$$N(A/C) \leqslant N(A/B)$$

若 $N(A/C) > 0.5$，则 $N(A/B) > 0.5$，于是

$$M(A/C) = M(A/B) = \Pi(A/B) = 1$$

若 $N(A/C) \leqslant 0.5$，则 $N(A/C) \leqslant 0.5$，于是

$$M(A/C) = (N(A/C) + 0.5) \cdot \Pi(A/C)$$

$$\leqslant (N(A/C) + 0.5) \cdot \Pi(A/B) = M(A/B)$$

若 $N(A/C) \leqslant 0.5$，$N(A/B) > 0.5$，$M(A/B) = 1$，显然有

$$M(A/C) \leqslant M(A/B)$$

于是 M 为包含度。

§5　包含度理论与证据推理

Dempster 和 Shafer 提出证据理论以后，形成了一种不确定推理方法，即证据推理。证据理论中主要是利用 mass 函数[2]，它是由人的经验给出的一种评价。如果给出关系数据库，即可用包含度理论确定 mass 函数。

设 $X = \{x_1, x_2, \cdots, x_N\}$ 为对象集，$\Theta = \{\theta_1, \cdots, \theta_m\}$ 为属性集。V 为 $X \otimes \Theta$ 上的模糊关系。$V_j(x)$ 表示 x 具有属性 θ_j 的隶属度。记

$$\sigma(x) = \sum V_j(x)/\theta_j$$

$$\delta(x) = \sum V_j^c(x)/\theta_j$$

对于任何 $x \in X$，$\sigma(x)$，$\delta(x)$ 是 Θ 上的模糊集。对于 Θ 上的模糊集 Q，记

$$\sigma^{-1}(Q) = \{x; \sigma(x) = Q\}$$

$$\delta^{-1}(Q) = \{x; \delta(x) = Q\}$$

则有下面的

定理 4　设 P 为 X 上的概率分布，则

$$m_1(Q) = P(\delta^{-1}(Q)) \tag{7}$$

$$m_2(Q) = P\{\sigma^{-1}(Q)\} \tag{8}$$

为 Θ 的全体模糊集上的 mass 函数，且由(7)和(8)确定的信任测度与似然测度分别为

$$B_1(Q) = P\{g(Q^c)\}, \ L_1(Q) = P\{g(Q)^c\}$$

$$B_2(Q) = P\{K(Q^c)\}, \ L_2(Q) = P\{K(Q)^c\}$$

其中

$$g(Q)=\{x;\ Q\subset\sigma(x)\} \tag{9}$$

$$K(Q)=\{x;\ Q\subset\delta(x)\} \tag{10}$$

证明 首先易证 $Q_1\neq Q_2$ 时

$$\delta^{-1}(Q_1)\cap\delta^{-1}(\theta_2)=\varnothing$$

$$(\sigma^{-1}(Q_1)\cap\sigma^{-1}(\theta_2)=\varnothing$$

对模糊关系 V 作出假设，$\forall x\in X$，$V_j(x)(j\leqslant M)$ 不全为 0，也不全为 1；$j\leqslant M$，$V_j(x)(x\in X)$ 不全为 0，也不全为 1。这时易知 $\delta^{-1}(\varnothing)=\varnothing$，$\sigma_{-1}(\varnothing)=\varnothing$，$\bigcup\delta^{-1}(\xi)=X$，$\bigcup\sigma^{-1}(\xi)=X$，于是 $\delta^{-1}(\xi)$ 及 $\sigma^{-1}(\xi)$ 为 X 的分划，于是(7)和(8)式确定了 mass 函数。由信任测度与似然测度和 mass 函数关系即证 B_i 与 L_i 成立。

(9)与(10)中使用了包含关系，我们可以用包含度来代替包含关系。设 D 为 Θ 上模糊集的包含度，记

$$\delta_*(Q)\doteq D(Q/\delta(x))$$

$$\delta^*(Q)=1-D(Q^c/\delta(x))$$

$$\sigma_*(Q)=D(Q/\sigma(x)))$$

$$\sigma^*(Q)=1-D(\sigma^c/\delta(x))$$

取

$$B_1'(Q)=P\{\delta_*(Q)\},\ L_1'(Q)=P(\delta^*(Q)\}$$

$$B_2'(Q)=P\{\sigma_*(Q)\},\ L_2'(Q)=P\{\sigma^*(Q)\}$$

则有

$$B_2\leqslant B_1',\quad L_1'\leqslant L_1$$

$$B_2\leqslant B_2',\quad L_1'\leqslant L_2$$

于是用包含度得到了更精确的区间估计 $[B_1',L_1']$ 和 $[B_2',L_2']$。

§6 包含度理论与信息推理

胡国定先生引进了信息量[5]，采用补集的概率。一般来说，一个概念的属性越多信息越大，但对象越多时信息量越少，因此用 $I(p)=P(\overline{A})$ 表示命题 p 的信息，其中 A 为 p 的外延对象集合。容易证明

$$D(q/p)=P(\overline{A}\cap\overline{B})/P(\overline{B})$$

为包含度，其中 A 和 B 分别为概念 p 和 q 的外延对象集合。

若 $D(q/p)=1$，则 $P(\overline{B})=P(\overline{A}\cap\overline{B})$，于是 $P(\overline{B}\backslash\overline{A})=0$，记为 $\overline{A}<\overline{B}$，即 q 的信息覆盖 p 的信息。这时“$p\Rightarrow q$”为必然命题。若

$$\triangle P(A,B)=P(\overline{B}\backslash\overline{A})+P(\overline{A}\backslash\overline{B})=0$$

则 p 与 q 为等价命题，记为 $p\cong q$.

若 $D(q/p)<1$ 称为或然推理，记为“$p\rightarrow q$”，$D(p/q)$ 表示“$p\rightarrow q$”可信的程度。

由 $D(q/p)=1$ 确定的必然命题“$p\Rightarrow q$”有必然命题的全部性质。由 $D(q/p)<1$ 确定的或然命题有新的性质。若 $D(q/p)>0$ 时，称 p 真时 q 更可信。则有下面的

定理 5 对于命题 p 和 q 有以下结论：

(1) 若 $p\Rightarrow q$，q 真，则 p 更可信；

(2) 若 $\bar{p}\Rightarrow q$，q 假，则 p 更可信；

(3) 若 $p\Rightarrow q$，p 假，则 q 更可信；

(4) 若 $p\Rightarrow q$，q 假，则 p 更可信。

证明　以(1)为例证明。由 $p\Rightarrow q$，则

$$D(q/p) = P(\bar{A}\cap\bar{B})/P(\bar{B})$$

于是 $P(\bar{B})=P(\bar{A}\cap\bar{B})>0$，则 $P(\bar{A})>0$，从而

$$D(p/q) = P(\bar{A}\cap\bar{B})/P(\bar{A})>0$$

即 q 真时 p 更可信。其它情形类似可证。

§7　专家系统中知识获取

专家要获取知识，首先要有案例。案例有两部分组成，一部分是条件属性的不同状态，一部分是假设的不同结果。案例是可以重复、不一致的，甚至是矛盾的。它是多个专家的经验，一般数量较大。知识获取是在大量的案例中提炼出几条规则，构成知识库中的知识。

我们用案例中假设的状态对案例分类，用 B_j 表示案例中假设为第 j 种决策的案例全体，q 表示假设的不同决策数，则 $\mathscr{B}=\{B_j;\ j\leqslant q\}$将所有案例进行分类。同样，我们也可以用案例中条件属性（或部分属性）将案例进行分类，用 A_i 表示案例属性的第 i 个状态的案例全体，p 表示条件属性所有可能的状态，则 $\mathscr{A}=\{A_i;\ i\leqslant p\}$将所有案例进行了分类。若 $A_i\subset B_j$，得到规则 $A_i\Rightarrow B_j$，即

若条件属性为第 i 个状态，则假设为第 j 个决策

但是对于某些 A_i，可能会对所有 B_j，$A_i\subset B_j$ 不成立，这时无法得到确定的规则。若 $D(B_j/A_i)$为包含度，取 $B_{j_0}\in\mathscr{B}$，使

$$\alpha_i = \max_{j\leqslant q} D(B_j/A_i) = D(B_{j_0}/A_i)$$

那么我们得到或然规则 $A_i\to B_{j_0}(\alpha_i)$，即

若条件属性为第 i 个状态，则假设为第 j_0 种决策

这条规则的可信度为 α_i。

一般来说，条件属性中的条件变量是比较多的。开始时可用一个条件变量进行分类，逐步试探，再增加条件变量，一直到所有规则强度 α_i 接近于1为止。

在上述试探过程中，对于某一步可计算

$$\alpha = \min_{i\leqslant p}\max_{j\leqslant q} D(B_j/A_i)$$

α 为所有规则的最小可信度。可以证明：

定理 6　设 $\mathscr{A}=\{A_i;\ i\leqslant p\}$，$\mathscr{B}=\{B_j;\ j\leqslant q\}$为所有案例的两个分类，则

$$D(\mathscr{B}/\mathscr{A}) = \min_{i\leqslant p}\max_{j\leqslant q} D(B_j/A_i)$$

为所有分类上的包含度。

由此可见，用包含度理论从案例中提取知识是一个简单而成功的方法。这种方法还可以用在模式识别中。

§8 规则的谐调度与矛盾规则的排除

包含度理论的另外一个成功的应用是建立不同规则之间的谐调度，解决矛盾规则的排除问题。

知识库中的知识可以是用§7中方法得到的，也可以是专家的经验。不管是那种情况，都难于保证知识库中的知识是协调的。知识库中的知识必须要有一定的谐调性，否则会影响知识库的使用效果。

为了建立规则之间的谐调度，首先我们建立相似度。设$S(B/A)$为模糊集的包含度，则

$$S_1(A,B) = D(B/A) \wedge D(A/B)$$

$$S_2(A,B) = D(A \cap B/A \cup B)$$

是相似度，且具有以下性质：

(1) $0 \leqslant Si(A,B) \leqslant 1$；

(2) $S_i(A,B)=S_i(B,A)$；

(3) $A \subset B \subset C$时$S_i(A,C) \leqslant S_i(A,B) \wedge S_i(B,C)$.

一般来说，用同一种包含度得到的相似度S_1和S_2是不相同的，但对于定理3中包含度得到的相信度S_1和S_2是相同的。

设“$A_1 \to B_1$”和“$A_2 \to B_2$”是两条模糊规则，用$S(A_1,A_2)$表示两条规则前件的相似度，$S(B_1,B_2)$表示两条规则后件的相似度，D为$[0,1]$上的包含度，两条模糊规则的谐调度为

$$C_{12} = D(S(B_1,B_2)/S(A_1,A_2))$$

$C_{12}=1$表示两条模糊规则是模糊谐调的。对于一组模糊规则“$A_i \to B_i$”$(i \leqslant n)$，可以求任何两条模糊规则的谐调度而构成谐调度矩阵：

$$C = (C_{ij}; i, j \leqslant n)$$

从谐调度矩阵C中找出最小的数排除相应的行和列，一直到谐调度矩阵元素都不小于某一个强度为止，剩余的规则是相对谐调的规则集。

谐调度矩阵C是满足$C_{ii}=1(i \leqslant n)$和对称的矩阵，我们也可以用模糊聚类法将规则集聚为若干类，这样每一类里的知识是相对谐调的。

模糊规则的谐调度还刻划了模糊关系方程有公共解的性质。

定理7 设“$A_1 \to B_1$”和“$A_2 \to B_2$”为两条模糊规则，若它们有公共解R满足

$$A_1 \circ R = B_1, \qquad A_2 \circ R = B_2$$

则$C_{12}=1$，其中谐调度中的包含度用例3中定义的包含度，相似度用

$$S(A_1,A_2) = \min_x \frac{A_1(x) \wedge A_2(x)}{A_1(x) \vee A_2(x)}.$$

“集合”和“关系”是客观世界的两个重要特征，也是研究客观世界的两个重要概念。包含度理论给出了不确定关系的定理描述，将确定关系的研究推进到不确定关系的研究。它对于人工智能、专家系统、模式识别、系统分析、管理决策、经济规划都有着重要意义。

参考文献

[1] Zadeh, L. A. Fuzzy Sets. Information and Control, No. 8, 1965, pp 338-353

[2] Shafer, G. A. Mathematical Theory of Evidence, Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 1976

[3] Kruse, R. Schwecke, E. and Heinsohn, J. Uncertainty and Vagueness in Knowledge Baeed Systems. Spinger-Verlag, Berlin, Heidelberg, 1991

[4] Mantaras, R. L. D. Approximate Reasoning Models. Ellis-Horwood Limitel, 1990

[5] Hu Guo-Ding. Information and Probable Inference, Proceedings of the International Workshop on Automated Reasoning, Beijing, China. 1992, pp84-107

[6] Grzymala-Busse, J. W. Manageing Uncertainty in Expert Systems. Kluwer Academic Publisher, 1991

[7] Neapolitan, R. E. Probabilistic Reasoning in Expert Systems. A Wiiey-Interscience Publication, 1990

[8] Dubois, D. and Frade, H. Possibility Theory. Plenum Press, 1988

[9] 张文修，梁怡．不确定性推理原理．西安：西安交通大学出版社，1966

Inclusion Degree Theory

W. X. Zhang　Z. B. Xu

(*Xian Jiaotong University, Xian, 710049*)

Y. Liang　K. S. Liang

(*The Chinese University of HongKong*)

Abstract

Uncertainty resoning is one of the most active and rapidly developing area in artificiai intelligence techniques. As a primary contribution to the area, a new theory-inciusion degree theory was developed systematically in the paper. With this theory, a unified account of various quantitative methods for uncertainty reasoning is presented, and some problems in expert systems has solvabled.

***Keywords*:** Inclusion Degree; Uncertainty Reasoning; Kuowledge Acquisition